
University of Virginia Library
B;2750;.K28;NO.55
ALD
Berkeleys Philosophie der Math
UX 000 578 878

1. Herr

„Kant-Studien“
Ergänzungshefte im Auftrag der Kant-Gesellschaft
herausg. von H. Vaihinger, M. Frischeisen-Köhler und A. Liebert. Nr. 55

Berkeleys Philosophie der Mathematik

von

Dr. **Gerhard Stammler**



Berlin
Verlag von Reuther & Reichard
1922

Ladenpreis: Mk. 10.—.
Für die Abonnenten der „Kant-Studien“: Mk. 8.—.
Für Jahresmitglieder der „Kant-Gesellschaft“ kostenfrei.

„Kant-Studien“
Ergänzungshefte im Auftrag der Kant-Gesellschaft
herausg. von H. Vaihinger, M. Frischeisen-Köhler und A. Liebert. Nr. 55

Berkeleys Philosophie der Mathematik

von

Dr. Gerhard Stammler



Berlin
Verlag von Reuther & Reichard
1921

Druck von H. Laupp jr in Tübingen.

Inhalt.

Literatur.

Julius Baumann: Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie, Bd. II, Berlin 1869. = Baumann, Lehren.

The Works of George Berkeley . . . ed. by A. C. Fraser, Oxford 1871.
Daraus:
Vol. I, S. 131 ff. »A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge«. = Tr. (dessen »Introduction« = Intr.).
Vol. III, S. 253 ff. »The Analyst . . .« = An. (dessen »Queries« = An. Qu.).
Vol. III, S. 299 ff. »A Defence of Free-Thinking in Mathematics . . .« = Def. (dessen »Appendix« = Def. App.).
Vol. III, S. 334 ff. »Reasons for not replying to Mr. Walton's Full Answer.« = Reasons.
Vol. IV, S. 419 ff. »The Common-Place-Book« = C. P. B. (Die in ( ) stehenden Ziffern sind der Numerierung nach Erdmann, Berkeleys Philosophie entnommen.)
Vol. III, S. 1 ff. »Arithmetica absque Algebra . . .« = Arithmetica.
Vol. III, S. 41 ff. »Miscellanea Mathematica« = Misc.

The Works of George Berkeley . . . ed. by A. C. Fraser, Oxford 1901.
Daraus:
Vol. III, S. 409 ff. »Of Infinities« = O. I.

The Works of George Berkeley . . . by George Sampson. London 1896.

Barnabas Brisonius: De verborum quae ad ius pertinent significatione. Leipzig 1721. = Brisonius, De verborum.

Moritz Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig 1901. = Cantor, G. d. M.

Erich Cassirer: Berkeleys System. Ein Beitrag zur Geschichte und Systematik des Idealismus. Gießen 1914 (Philos. Arbeiten, VIII. Bd.). = Erich Cassirer, Berkeley.

Ernst Cassirer: Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. Bd. II, Berlin 1901. = Cassirer, Erkenntnisproblem.

Ernst Cassirer: Kant und die moderne Mathematik. (Kantstudien, Bd. II, S. 1 ff.) Berlin 1907. = Cassirer, Kant u. d. m. M.

Friedrich Claußen: Kritische Darstellung der Lehren Berkeleys über Mathematik und Naturwissenschaft. Halle 1889. = Claußen.

Hermann Cohen: Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Berlin 1883. = Cohen, Infinitesimalmethode.

Corpus iuris civilis. Editio stereotypa tertia, Vol. II, Berlin 1884.

Corpus iuris civilis glossatum. Lugduni 1602.

Richard Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen. 4. Aufl. Braunschweig 1912. = Dedekind, Stetigkeit.

Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? 4. Aufl. Braunschweig 1918. = Dedekind, Zahlen.

Benno Erdmann: Berkeleys Philosophie im Lichte seines wissenschaftlichen Tagebuches. (Abhandlungen der preußischen Akademie der Wissenschaften.) Berlin 1919. = Erdmann, Berkeleys Philosophie.

C. I. Gerhardt: Die Geschichte der höheren Analysis. 1. Abtlg. Die Entdeckung der höheren Analysis. Halle 1855. = Gerhardt, Analysis.

Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniment petits. Paris 1696. = de l'Hospital, Analyse. (Die in ( ) eingeschlossenen römischen Ziffern beziehen sich auf die Ausgabe Paris 1715.)

Immanuel Kant: Kritik der reinen Vernunft. (Original-Seiten von 1787.) = Kant, Kr. d. r. V.

Immanuel Kant: Prolegomena. (Akademie-Ausgabe.) = Kant, Prolegomena.

Konrad Knopp: Funktionentheorie. Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Berlin und Leipzig 1918. = Knopp, Funktionentheorie.

Gerhard Kowalewski: Einführung in die Infinitesimalrechnung. 2. Aufl. Leipzig 1913. = Kowalewski, Einführung.

Gerhard Kowalewski: Grundzüge der Differentialrechnung. Leipzig und Berlin 1909. = Kowalewski, Grundzüge.

G. W. Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben von C. I. Gerhardt Halle 1849—1860.

Daraus:

Bd. IV, S. 104 ff. »Justification du calcul des infinitésimales par celuy de l'Algebre ordinaire.« = Leibniz, Justification.

Collins Maclaurin: A Treatise of Fluxions. Edinburg 1742. = Maclaurin, Treatise.

Eugen Meyer: Humes und Berkeleys Philosophie der Mathematik. Halle 1894 = Meyer, Hume und Berkeley.

Isaac Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. 3. Aufl. 1739—1742. = Newton, Principia.

Isaaci Newtonis Opuscula, collegit Johannes Castilioneus. Lausanne und Genf 1744.

Daraus:

Tom. I Opusculum III. »Tractatus de Quadratura Curvarum.« = Newton, Qu. C. (Dessen »Introductio« = Newton, Intr. Qu. C.)

Alois Riehl: Der philosophische Kritizismus, Geschichte und System. Erster Band: Geschichte des philosophischen Kritizismus. 2. Aufl. Leipzig 1908. = Riehl, Kritizismus.

Oswald Spengler: Der Untergang des Abendlandes. Umrisse einer Morphologie der Weltgeschichte. Erster Band: Gestalt und Wirklichkeit. München 1920. = Spengler, Untergang.

Rudolf Stammler: Theorie der Rechtswissenschaft. Halle 1911. = Rudolf Stammler, Theorie.

Rudolf Stammler: Rechts- und Staatstheorien der Neuzeit. Leipzig 1917. = Rudolf Stammler, Rechts- und Staatstheorien.

Friedrich Ueberweg: Uebersetzung von: Berkeley, Abhandlungen über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis. Philosophische Bibliothek Bd. 20. 4. Aufl. Leipzig 1907. = Ueberweg. (Dessen Anmerkungen dazu = Ueberweg, Anm.)

Heinrich Weber: Lehrbuch der Algebra. (Kleine Ausgabe in einem Bande.) Braunschweig 1912. = Weber, Algebra.

Theodor Ziehen: Das Verhältnis der Logik zur Mengenlehre. Berlin 1917. (Nr. 16 der Philosophischen Vorträge, veröff. von der Kantgesellschaft.) = Ziehen, Logik — Mengenlehre.

Einleitung.

Der Gedankengang, den wir in den beiden ersten Abschnitten vorliegender Abhandlung darstellen möchten — Berkeley's Philosophie der Mathematik — ist als ein historisch begrenzter Abschnitt eines weit umfassenderen Problems angesehen worden: Einer Philosophie der Mathematik überhaupt. Wir verstehen darunter die Lehre von den Bedingungen, unter denen die Gesetzmäßigkeit unserer Anschauung in unbedingt bleibender, einheitlicher Art sich erfassen läßt. Dazu soll der dritte Abschnitt einen kleinen Beitrag bieten.

Da somit das Problem bei Berkeley mehr als historische Vorstufe gedacht ist, verzichten wir im großen und ganzen auf eine Darstellung seiner Philosophie der Mathematik in streng philosophie-geschichtlichem Sinne, unterlassen es also, soweit als tunlich, »den sachlichen Entwicklungszusammenhang philosophischer Gedanken«[1]) in diesem Einzelfall zu verfolgen. Vielmehr wenden wir unsere Aufmerksamkeit der Frage »Quid iuris?« zu, welche wir an die Lehre des irischen Denkers richten werden; wir planen zu diesem Zweck eine möglichst rein systematische Darstellung des Gedankenfeldes von Berkeley, so wie es sich in seinen Werken uns darbietet.

Von diesen kommen für unsere Ziele hauptsächlich folgende in Betracht: Die »mathematischen« Abschnitte des »Treatise«[2]), ferner der »Analyst« und dessen Verteidigungsschrift »A Defence of Free-Thinking in Mathematics«. Dagegen wird von einer ausführlichen Besprechung der Jugendschriften abgesehen; wir werden sie, ebenso wie das historisch außerordentlich interessante wissenschaftliche Tagebuch nur gelegentlich heranziehen.

1) Vgl. Erdmann, Berkeleys Philosophie, S. 7.

2) Wir meinen Tr. § 118—132.

I.

Berkeley's metaphysische Theorie der Mathematik im ›Treatise‹.

Es mag auf den ersten Blick auffallend erscheinen, daß wir unsere Erörterung über eine Philosophie der Mathematik gerade an den Bischof von Cloyne anschließen, den heftigen Gegner des ›calculus differentialis‹ und der Fluxionsrechnung. Allein, ›wenn die Grundlagen mit Sicherheit und Gründlichkeit erfaßt, wenn ihre Verzweigungen in die besonderen Gebiete des Wissens mit voller Sachkunde verfolgt werden, so liegt, wie immer man über das schließliche Ergebnis urteilen mag, schon in dieser Art der Forschung ein dauernder Gewinn‹[1]). Dieses Satzes Anwendbarkeit auf Berkeley's Arbeit zu zeigen, war ein Punkt, der uns bestimmte, gerade den Feind der ›modern analysis‹ zur Einführung in unser oben gestelltes Problem zu wählen.

Denn wir haben in Berkeley einen Geist vor uns, der es ernst nimmt mit der Forderung, aufs Ganze der Erkenntnis zu gehen und alles nach einer fest zentrierten Weltanschauung zu ordnen, von da aus wieder die Einzelheiten scharf aufs Korn nehmend. Nur so ist es uns verständlich, daß derselbe Mann, der sein Bischofsamt mit solcher Güte verwaltete, daß seine Tätigkeit als eine der segensreichsten dort bezeichnet werden kann, der nach dem Scheitern seiner höchsten philanthropischen Pläne sich in den höfischen Intriguen, die seiner Uebersiedelung nach Cloyne voraufgingen, so zurückhaltend, milde und vornehm betrug — daß dieser selbe Mann mit derartig scharfer, unerbittlicher, wenn freilich auch nie ungerechter Polemik über die Mathematiker seiner Zeit hereinbrechen konnte.

S e i n e P o l e m i k h a t n u n a b e r z w e i S e i t e n, und wir nehmen dementsprechend eine Scheidung unserer oben angeführten

1) Cassirer, Kant u. d. m. M., S. 1.

Quellen vor, und zwar so, daß in der einen Gruppe die uns interessierenden Abschnitte seines philosophischen Hauptwerkes für sich betrachtet werden, während in der anderen Abteilung alles übrige in einer Besprechung des »Analyst« zusammengefaßt werden soll.

Es ist uns nämlich aufgefallen, daß trotz aller formellen Zurückhaltung im einzelnen, die sich unser Philosoph im »Treatise« auferlegt, doch gerade das in diesem Werke nicht so deutlich zum Ausdruck kommt, was wir an Berkeley eben besonders lobend hervorhoben, und was uns trotz allen inneren Widerspruches mit einer gewissen Wärme bei dem Studium seiner polemischen mathematischen Schriften erfüllte. Wird im »Analyst« die Frage nach der Wissenschaftlichkeit — besser Nicht-Wissenschaftlichkeit — der »modern analysis« mit aller Schärfe aufgenommen und durchgesprochen, so tritt im »Treatise« der wissenschaftliche Zentralismus zurück zugunsten eines Berkeley'schen Dogmatismus.

Damit scheint unsere oben gegebene Charakteristik Berkeley's denn doch einer erheblichen Korrektur zu bedürfen, wenn es nicht gelingen sollte, den Gegensatz zwischen »Analyst« und »Treatise« irgendwie zum Verschwinden zu bringen. So, wie die beiden Werke uns hier vorliegen, scheint zwischen ihnen eine Lücke zu klaffen; es scheint so, als ob der »mathematische«, Berkeley ein ganz anderer sei in seiner Grundstimmung, wie der »philosophische«. Die Einheit des Charakters scheint zerstört. Aber das scheint eben auch nur so. Denn wenn wir die neuesten Forschungsergebnisse über die Entwicklung der Lehre unseres Philosophen, an Hand seines wissenschaftlichen Tagebuches[1]) zu Rate ziehen, so geht aus diesem hervor, daß der »Treatise« in seiner jetzigen Gestalt die Entstehungsgeschichte der Gedanken geradezu auf den Kopf stellt. Was in ihm, so wie er sich dem Leser bietet, von gedanklich fundamentaler Wichtigkeit ist — die Polemik gegen »general abstract ideas« — erscheint, historisch betrachtet, sekundärer Natur[2]); was bei der Bildung der Gedanken weit voran steht

1) Vgl. Erdmann, Berkeleys Philosophie.

2) Vgl. hierüber die Ausführungen Erdmann's, deren Ergebnis lautet: »Alles, was hiernach über die Funktion von Berkeleys Abstraktionskritik festzustellen war, macht wahrscheinlich, daß sie kein Moment für die ursprüngliche Konzeption des Immaterialismus abgab«. S. 52.

— die »immaterial hypothesis«, noch immer als Ausgangspunkt der Erkenntnis genommen — ist im »Treatise« zur bewiesenen Behauptung geworden[1]; was endlich für das gesamte Denken Berkeleys von ursprünglich treibender, weil zentraler Bedeutung ist: seine tiefe Religiosität, das wird bei der Fixierung seiner Gedanken zum begehrenswerten Objekt[2]). So entwickelt sich aus der religiös fundierten »immaterial hypothesis« ein die christliche Religion stützendes immaterialistisches System.

Durch diese kurze Gegenüberstellung glauben wir nicht nur den scheinbaren Zwiespalt der Grundauffassung beider Werke erklärt zu haben, insofern wir die Gedanken des »Analyst« für »ursprünglicher« halten, sondern wir hoffen auch, dem Fehler klar ausgewichen zu sein, den B. Erdmann charakterisiert: »Und dieses Ergebnis kann für alle historischen Untersuchungen philosophischer Lehren insofern vorbildlich sein, als es eindringlich zeigt, daß wir aus der definitiven Gestaltung leitender Ideen niemals auf deren entwicklungsgeschichtliche Stellung schließen dürfen[3]).

Zwei Gedankenreihen scheinen uns Berkeley dazu getrieben zu haben, gegen die Mathematiker seiner Zeit Stellung zu nehmen; gerade ihn, der in seinen Jugendschriften für die Pflege der Mathematik eintritt — er hat, um der Arithmetik mehr Beliebtheit zu verschaffen, ein Spiel erfunden als Schach-Ersatz! Er erblickt in der Entwicklung der Mathematik seiner Zeit einen Rückschritt gegenüber den sicheren Methoden der antiken Geometer, und zweitens: Infolge dieser wissenschaftlichen Verflachung auch eine Laxheit auf religiösem Gebiet. Um den ersten Gedanken einigermaßen verständlich zu machen, schalten wir hier eine kurze Uebersicht darüber ein, was zu den verschiedenen Zeiten auf dem Gebiete der Infinitesimalbetrachtungen geleistet worden ist[4]).

1) C. P. B. (19): »In the immaterial hypothesis, the wall is white, fire hot etc.«

2) Ueber die treibende Kraft des religiösen Motivs bei Berkeley vgl. Erdmann, Berkeleys Philosophie, S. 33, 40, 45.

3) Erdmann, Berkeley's Philosophie, S. 60. — Wir benutzen die Gelegenheit, um zu betonen, daß wir bei der Untersuchung der mathematischen Gedanken in »Treatise« und »Analyst« eine solche historische Untersuchung nicht planen, wir vielmehr, unmittelbar von der endgiltigen Gestaltung der Gedanken ausgehend, das sachlich Bedeutsame hervorheben wollen.

4) Wir haben hier auf die, eine derartige Betrachtung scheinbar in Zweifel ziehenden Gedanken Spengler's einzugehen. Er will das »Problem der Weltgeschichte«

»Der Ursprung der höheren Analysis läßt sich bis zu den in ihrer Art unübertroffenen Schöpfungen der Geometer des griechischen Altertums verfolgen . . .«[1]; bis in die Glanzzeit Athens kann man zurückgehen, die ersten Anfänge in dem von Anaxagoras um 434 in die Geometrie eingeführten Problem der »Quadratur des Zirkels« suchend[2]. Ein anderes Problem, die Dreiteilung des Winkels führt

---

durch eine »Morphologie der Weltgeschichte« bewältigen. Mit Hilfe dieser Morphologie löst er das Ganze der Geschichte in verschiedene Kulturen auf, deren jede ein in sich wohl abgerundetes Ganzes ist. Jede Kultur hat ihr eigenes Weltbild und ihre eigene, dieses Weltbild wiedergebende Formensprache. Eine solche ist auch »die Mathematik«. Das heißt: Es gibt nicht eine Mathematik, sondern mehrere »Mathematiken«. Die Entdeckung des Pythagoras, daß die Zahl das Wesen aller sinnlich greifbaren Dinge sei, war nicht ein Schritt vorwärts in der Entwicklung der Mathematik, sondern schuf eine neue, die antike »Mathematik«. Um diesen Satz zu verstehen, muß man beachten, daß Spengler dem bisher eindeutigen Wort »Mathematik« — dem System von Sätzen eines besonderen Zweiges der Wissenschaft (vgl. S. 59 ff. dieser Abhandl.) — einen zweiten Sinn unterschiebt: »Den Besitz einer angeborenen virtuellen Zahlenwelt« (Untergang S. 84). Diese, so sucht er nachzuweisen, sei in jeder Kultur verschieden. — Allgemein: »Daß die bisher als selbstverständlich geltende Konstanz der geistigen Formen eine Illusion ist, daß es innerhalb der uns vorliegenden Geschichte mehr als einen Stil des Erkennens gibt, hat man bisher nicht anzunehmen gewagt . . . Das Tiefste und Höchste kann nicht aus der Konstanz, sondern allein aus der Verschiedenheit und nur aus der organischen Periodizität der Verschiedenheit erschlossen werden« (Untergang S. 88). Damit hat sich Spengler in den alten Zirkel begeben, der darin besteht, daß jede Allgemeingiltigkeit durch einen selbst allgemeingiltig sein sollenden Satz bestritten wird. Spengler übersieht ferner, daß jeder Stil des Erkennens nur Mittel zur erstrebten Einheit der Gedankenführung — zur Erkenntnis — ist, daß das »Problem der Weltgeschichte« also darin besteht, nicht nur die Stücke, sondern hauptsächlich das sie einigende Band, irgendwelche Konstanz, zu finden. Diese Einheit der Geschichte kann nicht im »ewigen Wechsel«, und sei er noch so periodisch, gefunden werden, sondern man muß sie in dem ihm zugrunde liegenden, absoluten — für alles (nicht nur das abendländische) Denken feststehenden — Gesetz menschlichen Wollens suchen. Daher ist Spengler's Morphologie zwar als feinsinnige Technik der Analogie verschiedener »Kulturen« zu würdigen, als Theorie der Geschichte aber — oder Philosophie — wie er gerne will, nicht zu verwenden. (Ueber »Technik« und »Theorie« vgl. Rudolf Stammler, Rechts- und Staatstheorien, § 1, I, S. 1.) Für uns kommt sie hier nicht in Betracht. Wir wollen, um es noch einmal zu sagen, nicht Stile, sondern Methoden der Erkenntnis festlegen.

1) Gerhardt, Analysis, S. 3.

2) »Plutarch erzählt, Anaxagoras habe im Gefängnis, also um 434, die Quadratur des Kreises gezeichnet« (Cantor, G. d. M. I, S. 189). Cantor vermutet, daß es sich hier um ein den Aegyptern nachgebildetes Verfahren handele. — Wir könnten sogar bis auf Pythagoras zurückgehen, wollten wir die Forschungen über Irrationalitäten in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen. Darauf aber verzichten wir. Denn der Zusammenhang derartiger Untersuchungen mit denen über Infinitesimales ist

»zur Entdeckung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichneten und in ihrer Entstehung verfolgbaren Linie«[1]). Und zwar war es wahrscheinlich der Sophist Hippias von Elis, der eine Kurve ersann, gleich geeignet zur Lösung der einen, wie der anderen eben genannten Aufgabe[2]). Weitere Fortschritte errang Antiphon dadurch, daß er als erster die einem Kreise eingeschriebenen Polygone von ständig steigender Seitenzahl zur Annäherung an das gewünschte Resultat der Kreisberechnung benutzte. Sein Zeitgenosse Bryson fügte die umbeschriebenen Vielecke hinzu und suchte die Kreisfläche als arithmetisches Mittel zwischen beiden zu errechnen[3]). »Wir glauben über das Irrige an Brysons Folgerung hinweggehen zu dürfen, den Tadel irgendeinen Mittelwert mit dem arithmetischen Mittel verwechselt zu haben, ersticken zu müssen unter dem Lobe, in der Erkenntnis des Grenzbegriffs weiter gekommen zu sein, als alle Vorgänger«[4]). Freilich, »die Mitte des V. S. konnte sich mit Schlußfolgerungen, wie diese beiden Männer sie zogen, nicht befreunden. Sie konnte nicht über den Widerspruch hinaus, noch um den Widerspruch herum kommen, der darin liegt, die krumme Kreisfläche durch eine geradlinig begrenzte Vielecksfläche erschöpfen zu lassen. Eine mathematische Begründung irgendwelcher Art, am naturgemäßesten ein selbst auf einen Widerspruch gebauter Beweis der Unmöglichkeit der entgegengesetzten Annahme, mußte vorausgehen und das bilden, was man die geometrische Exhaustion nennt. Aller Wahrscheinlichkeit nach versuchte Hippokrates von Chios zuerst oder als einer der ersten eine solche Schlußfolgerung, um zu dem Resultat zu gelangen, daß Kreisflächen zu den Quadraten ihrer Durchmesser proportional seien«[5]).

Vielleicht im Anschluß an solche Untersuchungen (oder schon vor ihnen?)[6]), entwarf Plato den Gegensatz zwischen der »analytischen« und der »synthetischen« Beweisart: Ueber einen Satz D sei

---

Berkeley nicht geläufig; seine Jugendschrift: »De radicibus surdis« zeigt nichts davon und spätere Bemerkungen über diesen Punkt sind uns nicht aufgefallen.

1) Cantor, G. d. M. I, S. 197.

2) Cantor, G. d. M. I, S. 196.

3) Vgl. Cantor, G. d. M. I, S. 202 f.

4) Cantor, G. d. M. I, S. 203.

5) Cantor, G. d. M. I, S. 204.

6) Dann müßte entweder die Lebenszeit des Hippokrates dementsprechend angesetzt werden, oder man müßte den Satz abweisen, daß er als erster oder als einer der ersten einen apagogischen Beweis zu führen versucht habe.

etwas auszusagen; aus seiner Richtigkeit folge die eines Satzes C, von diesem lasse sich ebenso auf B, und weiter auf einen bekannten Satz A schließen. Gemäß der analytischen Methode kann man nun sofort aus der Richtigkeit oder Unrichtigkeit des Satzes A die von D folgern. Es ist klar, daß dieses Verfahren, um überzeugend zu sein, stets der Synthese bedarf, bei der von A ausgehend auf die Giltigkeit von B, daraus auf die von C, und dann erst durch C auf D geschlossen wird — stets, mit Ausnahme des Falles, daß A als falsch bekannt ist; denn dann kann auch D nimmermehr wahr sein. (Apagogischer Beweis, »demonstratio ad absurdum«)[1]). Diese letzte Beweisform war in der antiken Geometrie sehr beliebt, namentlich dort, »wo der Grenzbegriff das unmittelbare Erreichen des Zieles ausschließt .... wird man bei griechischen Schriftstellern stets Beweisen aus dem Gegenteil begegnen«[2]).

Eine weitere Verschärfung der Beweise ist durch das Hinzunehmen eines Lemma gegeben, d. i. eines Grundsatzes, der für das Folgende unentbehrlich ist, wenn er auch den augenblicklichen Gedankenzusammenhang unterbricht. Archimedes berichtet, daß Eudoxus (390—337) bei den Beweisen seiner Sätze — Pyramide = $^1/_3$ des Prismas, und Kegel = $^1/_3$ des Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe — folgendes Lemma gebraucht habe: »Wenn zwei Flächenräume ungleich sind, so ist es möglich, den Unterschied, um welchen der kleinere von dem größeren übertroffen wird, sooft zu sich selbst zu setzen, daß dadurch jeder andere Flächenraum übertroffen wird«[3]). Archimedes berichtet ferner, daß schon vor Eudoxus dieses Lemma benutzt worden sei, um die Proportionalität von Kreisflächen zu den Quadraten ihrer Durchmesser zu erweisen[4]). »Jedenfalls war, wenn auch die erste Kenntnis des Lemma als solchen dem Eudoxus entrückt werden zu müssen scheint, seine Leistung eine sachlich, wie methodisch hervorragende, und wir haben ihn als einen der ersten Bearbeiter des Exhaustionsverfahrens unter allen Umständen zu nennen«[5]).

Einen der ersten apagogischen Beweise, die auf uns gekommen sind, bietet Dinostratus. (Bruder des Menächmus, um die Jugend-

1) Vgl. An. § 25.

2) Cantor, G. d. M. I, S. 220 f.

3) Cantor, G. d. M. I, S. 241 f.

4) Vgl. Cantor, G. d. M. I, S. 242. Vielleicht hat sich also schon Hippokrates eines solchen Lemmas bedient.

5) Cantor, G. d. M. I, S. 242.

zeit Alexanders des Großen.) Sein Endziel ist die Quadratur des Kreises, zu deren Durchführung er die von Hippias von Elis erfundene Kurve, von nun ab »Quadratrix« genannt, benutzt[1]). Von ihm wird bewiesen, daß der Kreis flächengleich ist einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete die Länge des Kreisdurchmessers hat, während die andere der Peripherie des Halbkreises gleich sein soll. Zu diesem Zwecke führt Dinostratus als erster die Rektifikation einer krummen Linie — des Kreisquadranten — durch[2]).

Alle diese Errungenschaften werden nun gesammelt, mit neuer, scharf durchdachter Beweisführung ausgestattet, und durch viele neue Resultate vermehrt von Euklid, Archimedes und Apollonius von Pergä[3]). Diese drei Namen repräsentieren für Berkeley und seine Zeit die antike Geometrie. Die beiden ersteren bildeten das sogenannte Exhaustionsverfahren aus, das darin besteht (bei ebenen Figuren) eine krummlinig begrenzte Figur durch Polygone von immer wachsender Seitenzahl und stets abnehmender Seitenlänge zu »erschöpfen«, das heißt zu beweisen, daß der Unterschied zwischen Figur und Polygon bei ständiger Vermehrung der Seiten des letzteren nun auch tatsächlich jede andere Größe untertrifft. Diese Beweise haben die großen antiken Mathematiker, namentlich Archimedes, nun mit aller ihnen zu Gebote stehenden Strenge durchgeführt. Um ihrem Verfahren die nötige Evidenz zu verleihen, verschafften sie sich zunächst ein Lemma und zeigten, auf dieses sich stützend, die Richtigkeit des von ihnen behaupteten Satzes. — Wir wollen hier das Lemma des Euklid anführen, da es bei der Ausbildung der späteren Mathematik im Mittelalter ständig herangezogen und als Grundlage der Untersuchung vielfach verwendet wurde. Es lautet: »Sind zwei ungleiche Größen gegeben, und nimmt man von der größeren mehr als die Hälfte weg, von dem Rest wieder mehr als die Hälfte, und so immer fort, so kommt man irgend einmal zu einem Reste, der kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe«[4]).

Bei Euklid findet sich ferner die erste Spur des Tangentenproblems, nämlich bei der Aufgabe, zu einer Kurve eine Tangente

1) Cantor, G. d. M. I, S. 246.

2) Cantor, G. d. M. I, S. 247.

3) Deren Verdienste um die Entwicklung der höheren Analysis sind oft genug gewürdigt worden, so daß wir uns mit dem gegebenen flüchtigen Hinweis begnügen können.

4) Vgl. Cantor, G. d. M. I, S. 268 f., ferner Gerhardt, Analysis, S. 4 ff.

zu finden, die durch einen bestimmten Punkt geht. Euklid definiert die Tangente ungefähr folgendermaßen: »Sie sei eine gerade Linie, die mit der Kurve nur einen Punkt gemein habe, so daß keine andere gerade Linie durch diesen Punkt zwischen der Kurve und Tangente gezogen werden könne«[1]). An Hand dieser Definition löst er dann die obige Aufgabe für den Kreis und beweist seine Ergebnisse indirekt. Archimedes und Apollonius gehen weiter, sie »fassen die Tangente als eine gerade Linie, die einen Punkt mit der Kurve gemein hat, sonst aber ganz außerhalb derselben liegt, sie setzen die Tangente zur Subtangente in Beziehung, so daß durch die letztere jene gefunden werden kann«[2]). So haben diese drei Meister alle großen Probleme der geometrischen Analysis ihrer Zeit zusammengefaßt und bearbeitet: Euklids »Elemente«, Archimeds Quadraturen und Kubaturen, sowie des Apollonius »Kegelschnitte« sind, in ihrer Art unübertroffene Werke, Berkeley's und der Mathematiker vor und zu seiner Zeit Lehrbücher und Vorbild gewesen[3]).

Nach dieser Glanzzeit indessen sank die Geometrie langsam von ihrer stolzen Höhe herab: »Von den Geometern des Altertums ist hier allein noch Pappus zu erwähnen . . . , indes mangelt sichtlich die Schärfe der Beweisführung, durch die Archimedes seinen Untersuchungen über Quadraturen und Cubaturen die höchste Evidenz verlieh«[4]), und »nach Pappus wird kein Geometer des Altertums gefunden, der etwas dem vorhergehenden Aehnliches geleistet hätte«.[5]).

Wie auf gar manchen anderen Gebieten der abendländischen Studien ging es auch in unserem Falle. Es schien, als ob die Trümmer des gestürzten weströmischen Reiches den Zugang nach dem Osten, in dem die Schätze der Wissenschaft aufgespeichert lagen, verschüttet hätten. Die Araber gaben als Vermittler auf dem Umwege über Spanien und Sizilien hauptsächlich Algebra und Rechenkunst, nur ganz vereinzelt werden geometrische Studien getrieben. So blieb die mathematische Gedankenverbindung mit

1) Gerhardt, Analysis, S. 38.

2) Gerhardt, Analysis, S. 38.

3) Selbst ein so begeisterter Verehrer Leibnizens, wie der Marquis de l'Hospital, muß berichten: »Ce que nous avons des anciens sur ces manières, principalement d'Archimède, est assurément digne d'admiration« (de l'Hospital, Analyse Préface, S. 3 (S. IV f.)).

4) Gerhardt, Analysis, S. 10.

5) Gerhardt, Analysis, S. 11.

der Antike nur sehr dürftig erhalten. »Erst als mit Einbruch der türkischen Horden in Europa die gelehrten Griechen eine Zufluchtsstätte im westlichen Europa suchten und zugleich die Kenntnis der griechischen Sprache verbreiteten, ward die Aufmerksamkeit der Abendländer auf die Meisterwerke ihrer Literatur gerichtet, und es begann das Studium der Geometrie des griechischen Altertums unmittelbar aus den Quellen«[1]). In erster Linie waren es die Schriften von Archimedes, aus denen man zu lernen suchte. Dabei konnte es nicht ausbleiben, daß man mehr oder minder selbständige Versuche machte, auf den Wegen der Griechen weiterzukommen, ihre Beweisart als Muster nehmend[2]). Was man aber zunächst nur übernahm, war das formelle Gewand. »So wurde denn das geniale Verfahren Archimeds unter den Händen der Mathematiker des 16. Jahrhunderts wirklich zu einer Methode und mit dem Namen »Exhaustionsmethode« belegt. Unbekümmert um einleitende und vorbereitende Sätze, in denen der wahre Nerv der Archimedeischen Strenge gefunden wird und ohne die scharfen indirekten Beweise umschloß man jede krummlinichte Ebene und jeden von krummen Oberflächen umgrenzten Körper sogleich durch Polygone und Polyeder und behauptete dem oben angeführten Euklideischen Grundsatz gemäß, daß die gegebene Figur von den umschriebenen bei Vermehrung ihrer Seiten oder Seitenebenen ins Unendliche sich um eine kleinere Größe, als irgend eine angebbare, unterscheide, die deshalb zu vernachlässigen sei«[3]).

So, die Alten als Wegweiser benutzend, anfangs sie nur kommentierend, dann einige wenige Schritte unter ihrer Führung weiter wagend, »bien de gens travailloient, ils écrivoient, les livres se multiplioient et cependant rien n'avançoit. Tel fut l'état des Mathématiques . . . jusqu'à M. Descartes«[4]). So schildert de l'Hospital treffend den Stand der mathematischen Disziplinen vor dem Zeitabschnitt, den er nach seinem Landsmann nicht ganz mit Unrecht benennt. Aber schon kurz vorher hatte sich Neues und vieles Gute Verheißendes gezeigt.

Den Auftakt zu dieser Entwicklung gab ein von einem Deutschen verfaßtes Werk: Kepler's »Stereometria doliorum«. In dessen »Supplementum« legt er sich und seinen Lesern die Aufgabe vor,

1) Gerhardt, Analysis, S. 12 f.
2) Vgl. Gerhardt, Analysis, S. 13.
3) Gerhardt, Analysis, S. 14 f.
4) de l'Hospital, Analyse Préface, S. 4 f. (VI).

87 neue, von ihm erfundene Körper auszumessen. »Wiewohl die Lösung der meisten dieser Probleme bei dem damaligen Zustande der Geometrie unmöglich war und Kepler selbst nur die leichtesten zu behandeln vermochte, so wollte er doch nicht bloß diese Probleme vorgelegt haben, sondern auch neue Gesichtspunkte aufstellen, durch welche die Lösung vielleicht einst möglich würde. Hier war nun seiner reichen Phantasie ein weites Feld eröffnet, nach allen Seiten hin kühne Gedankenblitze auszusenden, und in der Tat sind in diesem Supplementum und in dem darauf folgenden zweiten Teile seines gesamten Werkes: »Stereometria dolii Austriaci in specie« alle die Ideen ausgestreut, welche bis zur Entdeckung der höheren Analysis für die Mathematiker bei der Betrachtung der Probleme aus dem höheren Teile der Geometrie die Richtschnur bildeten«[1]). Was wir hier besonders hervorheben wollen, ist, daß durch die Kepler'schen Untersuchungen das »Unendlich-Kleine« — Kepler führt es als »gewissermaßen «Unendlich-Kleines ein — in der Mathematik heimisch wurde, und so wenig dieses »den Forderungen der mathematischen Strenge entspricht, so sehr hat es doch die Forschung gefördert. Man konnte sich leichter bewegen als in der schweren Rüstung einer strengen Methode«[2]).

Der Einfluß von Kepler's Werk war nun freilich nichts weniger als groß; denn seine andeutenden Grundgedanken wurden überboten durch den Versuch Cavalieri's, in seiner »methodus indivisibilium« eine allgemeine Behandlungsweise für die bisher als Einzelfälle untersuchten Aufgaben zu bieten. Der Gedanke, der seinen Ausführungen zugrunde liegt, ist der, eine Fläche als Gesamtheit aller zu einer bestimmten Geraden parallelen Linien, einen Körper als Gesamtheit aller zu einer bestimmten Ebene parallelen Flächen aufzufassen[3]). So hat Cavalieri an die Stelle des strengen indirekten, aber nur für jeden einzelnen Fall formell gleichen Verfahrens der Griechen ein überall gleichmäßig anwendbares direktes gesetzt.

---

1) »Nicht allein finden sich solche Bemerkungen, aus denen nach der Meinung Guldins Cavalieri seine methodus indivisibilium sich gebildet haben soll, sondern auch die Grundzüge der Methoden, die von den französischen Mathematikern der folgenden Zeit, Descartes, Fermat, Roberval und ihren Schülern in der Behandlung von Quadraturen und Cubaturen und namentlich in dem berühmten Tangentenproblem zur Anwendung gebracht wurden.« Gerhardt, Analysis, S. 16.

2) Kowalewski, Einführung, S. 100.

3) »Hierin steckt im Grunde der Begriff des bestimmten Integrals, aber doch in einer sehr unklaren Form.« Kowalewski, Einführung, S. 100.

Das ist sein unbestrittenes Verdienst[1]). Dabei darf man nicht übersehen, und deswegen wurde auch die »methodus indivisibilium« von vielen Mathematikern gleich nach ihrem Erscheinen heftig angegriffen, daß ihre Grundbegriffe, die »Indivisibilien«, aus deren »Gesamtheit« das zu untersuchende Objekt bestehen sollte, alles andere als Klarheit in sich tragen. (Cavalieri bezeichnete diese Gesamtheit durch omn. (= omnia); Leibniz ersetzte diese schwerfällige Bezeichnung durch s (= summa), woraus sofort das Integralzeichen wurde). »Deshalb muß die »methodus indivisibilium« Cavaleri's als epochemachend in der Geschichte der Entstehung der höheren Analysis betrachtet werden[2]).

Die Versuche, die Probleme der Analysis zu lösen, und zwar allgemein zu lösen, mehrten sich. Schon bevor Cavalieri's Werk erschienen war, hatten sich die Franzosen Fermat und Roberval eigenartige Methoden gebildet, mit deren Hilfe sie Quadraturen und Kubaturen zu lösen versuchten. Sie hatten sich gründlich in das Studium antiker Geometrie versenkt, »und ihre Schriften zeigen zum Teil einen Abglanz jener mathematischen Evidenz, wovon die Werke der griechischen Geometer ein unübertreffliches Muster für alle Zeiten darbieten. Das Bestreben jedoch ihren Methoden die möglichste Allgemeinheit zu verleihen, nötigte sie, in ihren Untersuchungen .... den rein geometrischen Gang der griechischen Geometer zu verlassen, und nach dem Vorgang Vieta's die räumlichen Größen der Geometrie durch Zahlen und allgemeine Zeichen auszudrücken« [3]). Fast gleichzeitig mit ihnen trieb Descartes seine Forschungen. Auch er versuchte eine allgemeine Lösung des Tangentenproblems mit Hilfe eines die Kurve berührenden Kreises [4]).

»In innigster Berührung mit Fermat und Roberval stand Pascal, der gleichfalls eine eigene Methode zur Behandlung der Probleme aus der höheren Geometrie sich schuf, indem er das Prinzip der Methode Cavaleri's beibehielt und das mit der Wissenschaft Unvereinbare durch eine schärfere Auffassung des Wesens dieser Methode

1) Vgl. Gerhardt, Analysis, S. 26.

2) Gerhardt, Analysis, S. 27.

3) Gerhardt, Analysis, S. 27.

4) Vgl. Gerhardt, Analysis, S. 39 ff. Roberval nimmt an, daß jede Kurve durch einen nach zwei oder mehr Richtungen angetriebenen Punkt entstanden sei, die Richtung, die diesem Punkt in einem gegebenen Augenblick innewohnt, ist die Tangente. Fermat's Methode beruht auf der der Maxima und Minima, wobei er mit einer unendlichkleinen zu vernachlässigenden Größe operiert.

deutete«[1]). Im Anschluß an Pascal's Untersuchungen will Leibniz zuerst auf den Grundgedanken seiner Entdeckung gekommen sein. (Nicht durch Barrow beeinflußt!) »Hugens und de Sluse versuchten die Regel Fermats zu erweitern und zu beweisen, ohne aber auf das Prinzip derselben einzugehen, haben sie nur Anweisung gegeben, wie man aus der gegebenen Gleichung sogleich das Resultat erhalten könne . . . Desgleichen hat de Sluse eine Regel zur Bestimmung der Tangenten und der Maxima und Minima gegeben«[2]).

Noch zweier Engländer müssen wir gedenken, die sich bemühten, die Fragen zu beantworten, mit denen sich die Mathematiker damals beschäftigten: Barrow und Wallis. Barrow ist der letzte Mathematiker vor Leibniz, der eine allgemeingiltige Lösung des Tangentenproblems anstrebt[3]). Zu diesem Zweck betrachtet er eine Kurve, ähnlich wie Roberval, in folgender eigentümlicher Weise: Sie sei durch die Bewegung eines Punktes entstanden zu denken, der nach zwei oder mehr Richtungen angetrieben wird. Durch die Richtung und Geschwindigkeit des Punktes soll dann die Tangente berechnet werden. Im übrigen war Barrow ein eifriger Anhänger und Verteidiger der Methode Cavalieri's. Bei ihm findet sich auch das später sogenannte »triangulum characteristicum« konstruiert, aus Ordinatendifferenz, Abszissendifferenz und der Tangente, die für Barrow in der Umgebung ihres Berührungspunktes mit der Kurve zusammenfällt[4]). — Einen ganz anderen Weg als seine Vorgänger, schlägt Wallis ein. »Arithmetica infinitorum« lautet der Titel seines Werkes. Er geht nicht von geometrischen Größen aus, sondern fußt auf Betrachtung unendlicher Reihen und sucht von da aus die geometrischen Probleme zu lösen.

So hatte man in diesen Versuchen eine Menge von Resultaten erworben, auch deren sachliche Zusammengehörigkeit erkannt, teilweise sogar im Sprachgebrauch wiedergegeben. (Direkte und inverse Tangentenmethode); es fehlte nur noch das Mittel, diese Einzelheiten als unter einen Gesichtspunkt gehörig auch äußerlich zu kennzeichnen: Eine gut gewählte, leicht verständliche Bezeichnungsweise.

1) Gerhardt, Analysis, S. 32.
2) Gerhardt, Analysis, S. 44.
3) Vgl. Gerhardt, Analysis, S. 45.
4) Vgl. Gerhardt, Analysis, S. 46 f.

Deren entstanden nun gleich zwei auf einmal, in England Newton's Fluxionsrechnung, in Deutschland Leibniz' Infinitesimalmethode. Leibniz ging von dem Gedanken aus, eine Kurve als Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten anzusehen, er konstruiert das »charakteristische Dreieck«, dessen wir oben gedachten und findet so verhältnismäßig schnell (1673): »Tota quaestio est, quomodo ex differentiis duarum applicatarum ipsae inveniri queant applicatae« [1]). 1675 löste er mit Hilfe seines neuen Kalküls diese Frage allgemein. Relativ spät dagegen, 1684, erschien sein grundlegender Aufsatz in den »Acta Eruditorum« unter dem Titel: »Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus« [2]). Erst drei Jahre später veröffentlichte Newton eine recht knappe auszugsweise Darstellung seiner Grundgedanken in dem Werke: »Philosophiae naturalis principia mathematica«. »Die Grundidee der Fluxionsrechnung ist die, daß jede Veränderliche oder »Fluente« als Funktion der Zeit betrachtet wird [3])«. Eine Kurve denkt sich Newton, der Schüler Barrow's, durch Bewegung eines Punktes entstanden, aus dessen Geschwindigkeit, der »Fluxion«, die »Fluente« berechnet werden soll. Eine genauere Darstellung dieser Methoden werden wir später durch Berkeley selber erhalten.

Newton kam mit seiner Veröffentlichung bereits zu spät; denn »ehe noch seine Theorie zur allgemeinen Kenntnis gelangte, war bereits die Differentialrechnung überall im Gebrauch, ja sie drang sogar in das Geburtsland der Fluxionsrechnung« [4]). So machte sich auch hier — mutatis mutandis — der Spruch geltend: Victa Graecia victorem vicit. Denn während aus dem wenig erquicklichen Prioritätsstreit Newton als der unzweifelhafte Sieger hervorging,

---

1) Gerhardt, Analysis, S. 56.

2) In der Oktobernummer der »Acta eruditorum« 1684.

3) Kowalewski, Einführung, S. 105.

4) Gerhardt, Analysis, S. 94. — Daß dieser Vorsprung nicht nur der früheren Entstehung, sondern auch der Güte der Leibniz'schen Bezeichnung zum mindesten mit zuzuschreiben ist, scheint uns klar. Wir sind auch nicht ganz der Ansicht C. J. Gerhardt's, der der Fluxionsrechnung einen gedanklichen Vorzug geben möchte; sondern wir sind vielmehr der Meinung, daß beide in dieser Beziehung vollkommen auf einer Stufe stehen. (Vgl. Gerhardt, Analysis, S. 94, wo es im Anschluß an die im Text zitierte Stelle heißt: »... und deshalb wurde der Vorzug, welchen die letztere vor jener voraus hatte, übersehen und blieb für die feste Begründung des Prinzips der höheren Analysis unbeachtet.«)

dessen Ruhm das »Commercium epistolicum« in alle Welt verbreitete[1]), war die Methode des Gegners im unaufhaltsamen Vordringen und begann zu Berkeley's Zeit, einer Zeit der Reaktion gegen die »unbedingte Verhimmelung Newtons« [2]), auch in England Fuß zu fassen, und zwar vermittelt durch das Lehrbuch des Marquis de l'Hospital[3]).

Wir mußten wenigstens die Hauptetappen dieser Entwicklung kennzeichnen, um es verständlich zu machen, wie Berkeley, der für die antiken Geometer sich begeistert, diejenigen so hart angreifen konnte, die sich als Erben und Mehrer der Schätze griechischer Mathematik ansahen. Sie maßten sich diese hohe Würde nämlich insofern zu Unrecht an, als ihnen die Strenge der Begriffe und Beweise größtenteils verloren, höchstens noch formell erhalten war; sie waren von der indirekten, scharfen, wenngleich umständlichen und schwer zu handhabenden Methode der klardenkenden antiken Meister zu einer direkten, und, wenngleich leicht handlichen und ungemein fruchtbaren, doch nur auf einer mehr oder minder unklaren Vorstellung des »Unendlich-Kleinen« sich stützenden »fortgeschritten«; sie hatten die Sicherheit und Festigkeit zugunsten der Ergiebigkeit und Eleganz geopfert.

Wir haben nunmehr zu untersuchen, wie sich Berkeley mit dieser Entwicklung abfand, oder vielmehr nicht abfand, wie er gegen sie anging und sie in andere Bahnen zu lenken versuchte, in Bahnen freilich, die die Wissenschaft nicht einschlagen konnte, ohne zugrunde zu gehen; wie er sie aber mittelbar — durch seine Polemik — auf Wege drängte, die sich als gangbar erwiesen, wenngleich ihm diese Entwicklungsmöglichkeit wahrscheinlich als eine Unmöglichkeit erschienen wäre. Wir wenden uns also zur Vorbereitung und Durchführung des Berkeley'schen Angriffes

1) Erst dem neunzehnten Jahrhundert, namentlich der Bemühungen G. J. Gerhardt's gelang es, die »Objektivität« des von der Royal Society eingesetzten Gerichtshofes zu enthüllen und die Gerechtigkeit des »Commercium epistolicum« in das gebührende Licht zu setzen.

2) Cantor, G. d. M. III, S. 737.

3) »Mochte auch die Verfehmung Leibnizens und seiner Schule, eine Frucht des Prioritätsstreites, über Newtons Tod hinaus manchen Engländer vom Studium und noch mehr von der Würdigung festländischer Werke zurückhalten, so ganz absperren konnte auch die englische Mathemathik sich nicht; und Eduard Stone gab 1730 A method of fluxions heraus, dessen erster Teil nichts anderes war, als eine Uebersetzung von L'Hospitals Analyse des infiniment petits.« Cantor, G. d. M. III, S. 736 f.

gegen das Denken der Mathematiker seiner Zeit. Wie wir schon oben erwähnten, haben wir zwei Pläne hierfür unterschieden, wovon der erste im »Treatise« niedergelegt ist.

Dessen Darstellung ist aber nicht möglich, ohne wenigstens ganz kurz die Hauptlehren dieses Werkes zu rekapitulieren. Berkeley hat es eben dort meisterhaft verstanden, sein Dogma auch über die Mathematik auszudehnen, und hat im »Treatise« seine Meinungen über Mathematik derart in sein System hineinverwoben, daß sie ohne dieses vollkommen haltlos wären.

Berkeley geht von dem Satze aus, daß alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebe und aus ihr stamme, in seiner Sprache, daß alle Gegenstände unserer Erkenntnis »ideas« seien[1]). »ideas« haben wir aber nur entweder unmittelbar durch Perzeption, »either compounding, dividing or barely representing those originally perceived . . .«[2]). Daraus ergibt sich sofort die bekannte Berkeley'sche Existenzgleichung für »ideas«[3]), mithin für alle Objekte menschlicher Forschung: »esse = percipi«[4]).

Bei den Gelehrten hat sich nun in allen Zweigen der Wissenschaft[5]), eine sonderbare Lehre[6]) ausgebildet; daß nämlich der menschliche Geist imstande sei, »general abstract ideas« zu bilden. Das sollen solche »ideas« sein, bei denen von allen Eigenschaften abstrahiert worden ist, wie sie einer gewöhnlichen »idea« anhaften. Als Beispiel führt er zunächst an, wie die »abstract idea« einer Qualität gebildet werden solle: ». . . we are told, the mind being able, to consider each quality singly, or abstracted from those other qualities, with which it is united, does by that means frame to itself abstract ideas«[7]). So löst der Geist also in diesem Falle die »compound idea« eines Dinges auf und betrachtet die so entstandenen einzelnen Bestandteile als eigene Objekte, d. i. besondere

1) Vgl. u. a. Tr. § 1, ferner § 4: ». . . what are the objects but the things we perceive by sense? and what do we perceive besides our own ideas . . .?«

2) Tr. § 1.

3) Wir geben »idea« absichtlich nicht durch »Idee« wieder, da wir für dieses Wort einen anderen, uns höher scheinenden Sinn, als den Berkeley'schen aufgespart haben.

4) Tr. § 2, 3, 6 u. a.

5) Vgl. Intr. § 6, 17.

6) »strange doctrine« Tr. § 11. Die Bezeichnung scheint uns noch recht milde für die Berkeley'sche Ansicht, daß diese Lehre alles wissenschaftliche Unheil nicht nur, sondern auch alle Unklarheit des Denkens und alle Unsicherheit des Fühlens verschulde.

7) Intr. § 7.

»ideas«. In anderen Fällen soll bei verschiedenen »ideas« von dem abstrahiert werden, was sie unterscheidet; so erhält man eine »general abstract idea« des ihnen allen Eigentümlichen: »So likewise the mind, by leaving out of the particular colours perceived by sense that which distinguishes them one from another, and retaining that only which is common to all, makes an idea of colour in abstract, which is neither red, nor blue, nor white, nor any other determinate colour«[1]. So erhält man auch die »abstract idea of a triangle . . . neither oblique nor rectangle, neither equilateral, equicrural, nor scalenon, but all and none of these at once«[2]. Man sieht sofort ein, wie recht Berkeley hat, wenn er gegen diese psychologische Bildung einer »general abstract idea« eifert: »I see evidently that it is not in my power to frame an dea of a body extended and moving, but I must withal give it some colour or other sensible quality«[3]. Zwar sagt er: »I own myself able to abstract in one sense, as when I consider some particular parts or qualiries, separated from others, with which though they are united in some object, yet it is possible they must really exist without them«[4]; aber dadurch wird der Protest gegen die »general abstract ideas« nicht beeinflußt.

Mit dieser Ablehnung der überlieferten Abstraktionstheorie glaubt Berkeley den »Materialisten« das letzte Verteidigungsmittel genommen zu haben. Mit diesem Namen bezeichnet er alle die, die eine Körperwelt »without the mind«[5] annehmen. Berkeley hat es jetzt leicht, die Falschheit dieser Ansicht zu zeigen. Wenn vorausgesetzt wird, daß alle Erkenntnisobjekte »ideas« sind, die nur »in uns« als perzipierte existieren können, so muß auch die ganze »Außen«welt »in« uns sein, sonst nirgend[6]. Wenn man aber

1) Intr. § 8.

2) Intr. § 13. Vgl. Riehl Kritizimus I, S. 85.

3) Tr. § 10, vgl. Intr. § 10, 16.

4) Intr. § 10, vgl. Intr. § 15, 16, Tr. § 8.

5) Wir machen hier auf das »without« aufmerksam. Soviel uns bekannt, ist dieses immer durch »außerhalb« wiedergegeben worden. Aber was soll denn das eigentlich heißen: Eine Körperwelt außerhalb des Geistes? Oder als deren Gegensatz »in the mind« »innerhalb« des Geistes? Sollte Berkeley den Geist als räumlich abgeschlossen auffassen? Hier scheint uns ein Punkt der Berkeley'schen Lehre vorzuliegen, der noch nicht genügend geklärt ist. Man könnte ja um diese Schwierigkeit herumkommen, wenn man »in« und »without« in übertragenem Sinne nähme und durch »mit Hilfe« (»durch«) und »unabhängig von« (»ohne«) wiedergäbe; ob das aber im Sinne Berkeley's verdolmetscht wäre, ist fraglich.

6) Tr. § 3, 4.

»abstract ideas« zuließe, so könnte es sich der Geist einfallen lassen, auch die höchste Höhe der Abstraktion zu erklimmen, die »abstract idea« eines unperzipierten Gegenstandes zu bilden, und könnte so eine Welt selbständig existierender Körper aufbauen. Ja, Berkeley steht nicht an, zu erklären: »If we thoroughly examine this tenet (. . . that . . . all sensible objects have an existence . . . distinct from their being perceived by the understanding [Tr. § 4]) it will be found at bottom to depend on the doctrine of abstract ideas«[1]), worauf er noch einmal die Unmöglichkeit derartiger »abstract ideas« auseinandersetzt.

Mit diesen Ausführungen haben wir den Boden umgrenzt, auf den Berkeley seine Philosophie der Mathematik gründet. Im »Treatise« behandelt er hierbei, dem Titel des Werkes folgend, bei dem Aufbau seiner Lehre — mehr ein Versuch des Niederreißens zeitgenössischer Vorstellungen zu nennen — nur die Grundlagen, wie die nachfolgende Darstellung und namentlich ein Vergleich mit dem »Analyst« lehrt.

Gleich der erste hier zu besprechende Absatz[2]) ist bezeichnend für die Vorsicht und Zurückhaltung, mit der Berkeley im »Treatise« vorgeht. Nicht die »principles laid down by mathematicians« sollen angegriffen werden, im Gegenteil, sie werden mit Respekt behandelt, ihnen wird das Prädikat »true« zuerkannt; auch »the way of deduction from those principles« ist »clear and incontestible« — wie schon vorher die »clearness and certainty of demonstration, which is hardly anywhere else to be found«, gerühmt worden war — sondern wie Berkeley in recht gewundenen Ausdrücken erklärt, richtet sich sein Angriff gegen »some secret error« in den »transcendental maxims«, die allen Wissenschaften gemeinsam sind und bei den Mathematikern zwar nicht ausdrücklich erwähnt, aber doch stets stillschweigend vorausgesetzt werden: »the doctrine of abstract general ideas and the existence of objects without the mind«[3]).

1) Tr. § 5, Vgl. Tr. § 10, 11. Aehnlich beim Beweis der Nicht-Existenz einer »material substance« in Tr. § 17: »The general idea of Being appearth to me the most abstract and incomprehensible of all other.« Der zweite Beweis, ebenfalls in Tr. § 17, gründet sich auf die Nicht-Existenz der Außenwelt und man gelangt auch auf diesem Wege zur Lehre von den »general abstract ideas« als dem Pfeiler der bisherigen Philosophie.

2) Tr. § 118.

3) Sämtliche Stellen aus Tr. § 118. Der Gegensatz zum »Analyst« wird später noch hervorgehoben werden.

Mit diesen, man möchte fast sagen, erlösenden Worten, hat Berkeley die Punkte gekennzeichnet, gegen die er seinen Angriff zu richten gedenkt, und er beeilt sich nun, ihn in großen Zügen zu entwickeln[1]. Die Mathematik wird in Arithmetik und Geometrie eingeteilt, die erstere als die Lehre von den Zahlen, die letztere als Lehre von der Ausdehnung genommen[2].

Die Zahlen — so führt Berkeley aus[3] — werden von vielen Gelehrten gerade deswegen geschätzt, weil sie die abstraktesten der »abstract ideas« in ihnen zu sehen glauben, zu ihrer Erfassung also die größte Geistesenergie für notwendig halten. Der Nachteil dieser Auffassung hat sich von Anfang an geltend gemacht, darin sich zeigend, daß man die kühnsten Spekulationen und die nichtigsten Phantastereien für das höchste Gut hielt[4]. Und all das kommt bloß daher, daß man an »abstract ideas« glaubt! Mit diesem Hinweis könnte sich Berkeley begnügen, die »abstract idea of Number« als erledigt betrachten; aber er geht doch noch etwas näher darauf ein. Die Zahlen sind doch nichts anderes, als »collections of units«[5]. Durchmustere ich nun — so hatte er schon früher gesagt[6] — meinen Bestand an »ideas«, so finde ich, daß dem Wort »unity« keine »idea« entspricht, das heißt »that there is not any such idea«[7]. Daraus folgt, daß es erst recht keine »ideas of number in abstract denoted by the numeral names and figures« gibt[8]. Daher gibt es auch keine Lehren über dergleichen sinnlose Dinge, oder besser gesagt, diese müßten als »difficiles

---

1) Ins Einzelne gehen seine Ausführungen nicht, des öfteren verweist er in solchen Fällen, wo eine genauere Analyse erwünscht wäre, auf spätere, noch zu liefernde Untersuchungen. (Tr. § 125, 131, 132.) Es ist hierbei wohl auf den geplanten III. Teil der »Principles« hingezielt, dessen Inhalt im Tagebuch (C. P. B. 560) angedeutet ist. (Vgl. Erdmann, Berkeleys Philosophie S. 93.) Auffällig ist nur, daß die Stellen in § 125 und § 132 des »Treatise« in der zweiten 1734 erschienenen Auflage weggelassen worden sind, daß ferner der in demselben Jahr erscheinende »Analyst« das in § 132 gegebene Versprechen vollkommen einlöst. Demnach dürfte es nicht unberechtigt sein, zu sagen, daß wir in dem »Analyst« einen Teil des III. Bandes vom »Treatise« ausgeführt, wenn auch vollkommen aus dem Gedankenzusammenhang losgelöst, vor uns haben.

2) Vgl. Tr. § 119 und § 123.

3) Vgl. Tr. § 119.

4) Tr. § 119: »It hath set a price on the most trifling numerical speculations.«

5) Tr. § 120.

6) Tr. § 13.

7) Tr. § 120.

8) Tr. § 120.

nugae« betrachtet werden[1]). Wenn man also bei den Theoremen der Arithmetik sowohl von den bezeichnenden »names and figures«, wie von den bezeichneten »things« abstrahiert, so behält man als Objekt »nothing at all«. Der Weg, den Berkeley einzuschlagen gedenkt, ist vielmehr ein ganz anderer: »Hence we may see how entirely the science of numbers is subordinate to practice, and how jejune and trifling it becomes when considered as mere speculation« [2]). Der Maßstab für den Wert einer Forschung ist also hier — der Nutzen des täglichen Lebens; wie Berkeley an anderer Stelle sagt, »the benefit of life« [3]).

Da Berkeley — mit Recht, wie wir glauben — meint, daß einige »deluded by the specious show of discovering abstracted verities« [4]) sein Ergebnis nicht so ohne weiteres annehmen werden, so unternimmt er nun einen sehr lehrreichen Beweisversuch, indem er die Geschichte der Arithmetik untersucht und findet, daß das, was die Menschen zur Schöpfung dieser Wissenschaft trieb — daß das der Menschen kurzes Gedächtnis war. Dieses veranlaßte sie, Steine, Striche, Zeichen — zuletzt die Ziffern des Dezimalsystems — einzuführen, um einzelne Gegenstände leichter zusammenfassen zu können. Dabei fand man für einzelne Zeichen einzelne Regeln, dehnte sie durch Analogie aus und erhielt so das Gebäude der Arithmetik[5]).

Lehrreich nannten wir diese Untersuchung, weil wir in ihr ein Musterbeispiel erblicken. Das ganze gipfelt nämlich in folgenden Worten: »In Arithmetic therefore, we regard not the things, but the signs, which nevertheless are not regarded for their own sake, but because they direct us, how to act with relation to things, and dispose rightly of them« [6]). Berkeley gibt also vor, er habe gezeigt, wodurch arithmetische Tätigkeit der Menschen sich vor anderer auszeichne; in unserer Sprache, seine Untersuchung habe die Frage beantwortet: »Was ist Arithmetik?« Tatsächlich hat er das nicht getan. Ihn hat nur die Frage beschäftigt: »Wie ist Arithmetik entstanden?« Diese hat er zu lösen versucht. Nun ist aber die systematische Frage nie durch die

1) Tr. § 119.
2) Tr. § 120.
3) Tr. § 119. Derselbe Ausdruck findet sich bei der Geometrie § 131.
4) Tr. § 121.
5) Vgl. Tr. § 121.
6) Tr. § 122.

Lösung der genetischen zu erledigen, vielmehr setzt die letztere implizite bereits die Beantwortung der ersteren voraus. Denn, um überhaupt fragen zu können, wie ein Gegenstand entstehe, muß man doch vorher wissen, was das Etwas eigentlich ist, dessen Werden geschildert werden soll. Wer bürgt uns sonst dafür, daß nicht etwas ganz anderes vor unserem Geiste entsteht, als das ist, wonach gefragt wurde? Wird nicht zum Beispiel in unserem Falle bei Berkeley die Entstehung der Rechenkunst geschildert, und nicht die der Wissenschaft Arithmetik? Wir lernen also in dieser Deduktion ein Musterbeispiel für die Verwechslung der genetischen und systematischen Fragestellung kennen. Wie weit sich diese übrigens durch das ganze Berkeley'sche System hindurchzieht, geht daraus hervor, daß schon der Satz, von dem Berkeley ausgeht, eine derartige »confusio quaestionum« in sich schließt. In dem Falle, der uns augenblicklich interessiert, tritt außerdem der Doppelsinn des Wortes »number« hinzu, das bald Ziffer, bald Zahl heißen kann. Wir referieren also: Berkeley sagt: »numbers« dürfen wir nie für sich betrachten, sondern müssen uns stets bewußt sein, daß sie nur Zeichen sind[1]).

Aehnliches gilt von dem zweiten, ihn bei weitem mehr interessierenden Gebiet der Mathematik: Der Geometrie[2]). Er behandelt diesen Gegenstand viel ausführlicher, freilich auch viel behutsamer, als die Arithmetik. Kein Wunder; denn hier wagt es der Philosoph, mathematische Methoden anzutasten, deren Erfindung einen großen Teil seiner geometrisch gebildeten Zeitgenossen mit Stolz erfüllte, und Berkeley ist sich dieser Opposition auch vollkommen bewußt. Er hat auch nicht, wie später im »Analyst«,

---

1) Analog zu der von uns eben geübten Kritik der Doppeldeutigkeit des Wortes »number« ließe sich vielleicht auch eine solche der Berkeley'schen Sprachtheorie durchführen (Intr. § 18 ff.), Berkeley selber hat diese analogische Denkweise schon im Tagebuch entwickelt und seitdem festgehalten — doch erscheint uns eben die ganze Berechtigung dieser Analogie zweifelhaft und höchstens zwischen den Zahlzeichen und Worten anwendbar. (Ueber die Analogie im Tagebuch vgl. Erdmann, Berkeley's Philosophie S. 97, sowie die dort angeführten Stellen des C. P. B.)

2) Im »Treatise« ist nichts von dem Gegensatz zu spüren, wie er noch in einer späteren Aufzeichnung des Tagebuches zwischen Arithmetik und Algebra einerseits und Geometrie andrerseits gemacht, vielmehr gesucht wird: »Qu. wether Geometry may not properly be reckon'd amongst the mixt mathematics — Arithmetic or Algebra being the only abstracted pure i. e. entirely nominal — Geometry being an application of those to points.« (C. P. B. 762).

die Entschuldigung, daß er sich als Angegriffenen betrachte, sich also gewissermaßen in Notwehr befinde.

Die Geometrie hat nun die »extension« zum Objekt. Natürlich nicht »in abstract«, sondern — wie hier der Gegensatz dazu genannt wird — »as relative« [1]). Berkeley's ganze Untersuchung richtet sich gegen einen Gedanken: Die Möglichkeit einer »infinite divisibility of finite extension«. Der Satz, daß jede endliche Ausdehnung in unendlich viele Teile zerlegbar sei, scheint ihm, obwohl nie in den Elementen als Axiom oder Theorem ausgesprochen, doch ganz fest mit allen geometrischen Untersuchungen verknüpft zu sein. Ihm bürdet Berkeley alles auf, was jemals als »schwierig« am Studium der Geometrie empfunden worden ist; er ist der Ausgangspunkt all jener »amusing geometrical paradoxes», die dem »common sense« so zuwider sind; er verschuldet auch »all that nice and extreme subtility, which renders the study of mathematics so difficult and tedious« [2]). Ist es nicht ein Verdienst, die Mathematik von diesen Spitzfindigkeiten zu befreien und zu zeigen, »that no finite extension contains innumerable parts or is infinitely divisible?« [3]).

Den Beweis für die Falschheit des bisher von den Mathematikern allgemein anerkannten Satzes führt Berkeley nun folgendermaßen: Jede »finite extension«, als Objekt der Forschung genommen, muß eine »idea« sein, wenn anders das Wort überhaupt einen Sinn haben soll. Nun ist es unmöglich, in irgendeiner Linie, Fläche oder anderen »extension« unzählig viele Teile zu unterscheiden, also sind sie auch nicht darin enthalten. Sonst müßte man ja eine »idea« »into an infinite number of other ideas« zerlegen können! Keine »reasonible creature« würde mit dem eben aufgedeckten Widerspruch einverstanden sein, wenn man nicht ganz allmählich das Vorurteil eingeflößt bekäme, das aus der »proposition« ein »principle« macht und nicht nur dieses »Prinzip«, sondern auch seine Folgerungen heiligt [4]).

Wer freilich an »abstract general ideas« oder an eine »existence of objects without the mind« glaubt, der könnte denken, daß »a line in abstract« ins Unendliche teilbar sei, oder »a line but an inch long« unzählige, wirklich existierende, wenngleich nicht

1) Tr. § 123.
2) Tr. § 123, vgl. C. P. B. (903).
3) Vgl. Tr. § 123.
4) Vgl. Tr. § 124.

perzipierbare Teile besitze. Tatsächlich teilen denn auch sehr viele Geometer diese Irrtümer mit den meisten Menschen [1]. Irrtümer bleiben es darum doch.

Berkeley's Interesse ist nun darauf gerichtet, trotz dieser Ablehnung die Allgemeingiltigkeit der Geometrie zu erhalten. Dabei erfahren wir gleichzeitig, wie die Mathematiker dazu kommen, die obigen Irrlehren zu bilden und festzuhalten. Hierbei entwickelt er seine Theorie der Geometrie [2], die in gewissem Sinne eine Nachgabe an den bisher so energisch bekämpften Standpunkt bedeutet. Es gibt nämlich, Berkeley zufolge, »universal ideas«, z. B. »the particular triangle I consider . . . stand for and represent all rectilinear triangles whatsoever, and is in that sense universal« [3]. Noch deutlicher sagt er: »The particular lines and figures included in the diagram are supposed to stand for innumerable others of different sizes; or, in other words, the geometer considers them, abstracting from their magnitude — which does not imply that he forms an abstract idea but onely, that he cares not, what the particular magnitude is . . . « [4]. Diese »universal ideas« sind demnach an die perzipierte Figur gebunden und haben lediglich repräsentativen Wert. Vergißt man diesen Vertretungscharakter, und überträgt man, wie bei den Geometern allmählich üblich geworden ist, »the properties of the lines signified« [5] auf die »marks standing for greater quantities« [6], so begeht man einen Fehler, der die Paradoxien des Unendlichen nach sich ziehen kann. Zeichnet man z. B. eine Linie von einem Zoll, so ist es Unsinn, von deren zehntausendstem Teil zu reden; denn so etwas gibt es gar nicht [7]. Sicher dagegen läßt sich unter den durch sie bezeichneten Linien eine finden, deren zehntausendster Teil wirklich existiert, und nur in diesem Sinne hat es Sinn, so zu tun, »als ob« die Zollinie in so viel Teile zerlegbar sei. Demnach können wir überhaupt nur dann davon reden, »a line is infinitely divisible«, wenn wir dabei »a line which is infinitely great« im Auge haben [8].

1) Vgl. Tr. § 125.

2) Genau genommen greift er eigentlich nur die in der Einleitung entwickelte Theorie wieder auf.

3) Intr. § 15.

4) Tr. § 126.

5) Tr. § 126.

6) Vgl. die analogische Sprechweise in Intr. § 19.

7) Tr. § 127.

8) Tr. § 128.

In diesen Betrachtungen Berkeley's liegt schon manches von seinem Angriff gegen die »modern analysis« enthalten. Aber wir müssen hier gleich bemerken, daß das Wort »Fluxion« nur in der ersten Auflage des »Treatise« zu finden ist, und auch da in einem noch näher zu erörterndem Zusammenhange. Dagegen wird mehrfach von »infinitesimals« gesprochen. Das ergibt eine eigenartige Stellung Berkeley's, die leicht mißverstanden werden konnte. Schon in den Worten: ». . . the ten thousendth part of that line (deren Länge ein Zoll ist) considered in itself is nothing at all, and consequently may be neglected without an error . . .« liegt enthalten, daß Berkeley gegen Infinitesimalbetrachtungen vorgeht. Ein Anhänger der Newton'schen Anschauung, daß unendlich-kleine Größen nicht in die Geometrie eingeführt werden müßten, ja daß ihr Gebrauch zu vermeiden sei, brauchte die Angriffe Berkeley's also einstweilen gar nicht auf seine Methode zu beziehen.

Er konnte mit einer gewissen Ruhe die Worte lesen, mit denen dieser Abschnitt schließt; nachdem Berkeley sein Erstaunen darüber ausgedrückt hat, daß man »by I know not what logic« Widersprüche, wie sie aus der »infinite divisibility of finite extension« sich ergeben, nicht als Gegenbeweise »a posteriori« zulasse[1]), gleich als ob »anything absurd and repugnant could have a necessary connexion with truth or flow from it« — die Worte: »But whoever considers the weakness of this pretence will think it was contrived on purpose to humour the laziness of the mind which had rather aquiesce in an indolent scepticism than be at the pains to go through with a severe examination of those principles it has ever embraced for true«[2]).

Ein Newtonianer konnte mit derselben Ruhe ferner die Worte lesen, mit denen Berkeley nun seinen Hauptangriff einleitet: »Of late the speculations about infinites have run so high, and grown to such strange notions, as have occasioned no small scruples and disputes among the geometers of the present age«[3]). Denn wieder ist nur von »infinites« die Rede. Wenn wir

---

1) »Berkeley bedient sich hier des Ausdrucks »Beweise a posteriori« in dem guten alten Sinne: »Beweise, welche aus den Folgen (dem . . . natura posterius) gezogen sind« . . .« (Ueberweg, Anm. 108).

2) Tr. § 129.

3) Tr. § 130. Wir haben auf die eigentümliche Stellung Berkeley's gegenüber den Fluxionen deswegen aufmerksam gemacht, weil er sich später in der »Defence« darauf bezieht, daß er bereits im »Treatise« einen Angriff gegen die »modern ana-

übrigens eben sagten »Hauptangriff«, so ist das nicht etwa so zu verstehen, als ob nunmehr besondere Sorgfalt und Ausführlichkeit von Seiten Berkeley's zu erwarten sei. Im Gegenteil, wir müssen uns gerade im Folgenden mit recht kurzen, fast fragmentarisch zu nennenden Andeutungen begnügen, und werden des öfteren auf spätere Untersuchungen vertröstet[1]). Und doch ist hier der Abschluß des mathematischen Gedankenganges von Berkeley zu finden, derjenige Teil, auf den alle bisherigen Betrachtungen über Geometrie zugeschnitten sind.

Der Feind, der bekämpft wird, sind also die »speculations about infinites«. Berkeley teilt sie in zwei Klassen; die Verteter der einen »not content with holding that finite lines may be divided into an infinite number of parts, do yet farther maintain that each of those infinitesimals is itself subdivisible into an infinity of other parts or infinitesimals of a second order and so on ad infinitum«. Sie nehmen also nicht nur eine unendliche Zahl von Teilen an, »but an infinity of an infinity of an infinity in infinitum of parts« [2]). Damit ist für jeden auch nur einigermaßen bewanderten Zeitgenossen Berkeley's der Marquis de l'Hospital mit seiner Redewendung: »l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis« [3]) genügend gekennzeichnet. Also die Leibnizianer stehen in der ersten Gruppe. Wenn man nun aber erwartet, auf der Gegenseite Newton's Ansicht zu hören, so wird man arg enttäuscht. Denn auf der andern Seite sind Leute zu finden, die »all others infinitesimals below the first to be nothing at all« annehmen. Als Gegner Leibnizens wird also Nieuwentijt ausgespielt[4]). Nicht die leiseste Kenntnis verrät Berkeley hier von der Existenz der Fluxionsrechnung! Damit hat Berkeley folgende Antinomie erreicht. These: »With good reason« findet man es »absurd to imagine there ist any positive quantity or part of extension which, though multiplied infinitely can never equa the smallest given quantity«. Antithese ». . . it seems no less absurd to think the square, the cube or

lysis« unternommen habe. Wenn nun seine Gegner sich eine zweite Auflage des »Treatise« verschafften, so war darin mit keiner Silbe von den Fluxionen die Rede!

1) Vgl. Anm. 1 zu S. 24 d. Abh.

2) Tr. § 130.

3) de l'Hospital, Analyse Préface, S. 1, (III).

4) Berkeley war, das zeigt sein Schriftchen »Of Infinities« (vgl. das. S. 411), durch de l'Hospital die Meinung Nieuwentijt's bekannt geworden. Vgl. de l'Hospital, Analise Préface S. 13 (XIV f.) Vielleicht hat er sich dann durch Gespräche mit Mathematikern näher darüber unterrichtet. (Vgl. Def. § 43 f. S. 327 f.)

other power of a positive real root, should itself be nothing at all . . .«[1]). Entscheidung: »Have we not therefore reason to conclude they are both in the wrong . . .?«[2]).

Durch diesen Entschluß Berkeley's, beiden Parteien Unrecht zu geben, wird die Ablehnung der »doctrine of the infinite divisibility of infinite extension« gekrönt. Eine Schwierigkeit bleibt indessen noch. Wenn diese Lehre tatsächlich derartig grundlegend für die Mathematik ist, wie behauptet wurde, wird dann nicht durch ihre Falschheit das ganze Gebäude der Geometrie so stark mitgenommen, daß es als Ganzes seinen Halt verliert? Werden nicht mit den »speculations of infinites« zugleich viele gute, alte, von berühmten und verehrten Meistern bewiesene Lehrsätze fallen? Wird es nun nicht nötig werden, alles, was bisher bewiesen, noch einmal jetzt durchzusehen, ob es wirklich richtig sei? Ob nicht der nun aufgedeckte »Irrtum« sich in diesem oder dem Beweise wiederfinde?

»To this it may be replied that whatever is useful in geometry, and promotes the benefit of human life, does still remain firm and unshaken on our principles; that science considered as practical will rather receive advantage than any prejudice from what has been said. But to set this in a due light (and show how lines and figures may be measured, and their properties investigated, without supposing finite extension to be infinitely divisible)[3]) may be the proper business of another place«[4]).

Wir müssen gestehen, daß uns diese Worte vollkommen unbefriedigt lassen. Wir hatten erwartet, daß man das rette, was Berkeley sonst die »certainty and clearness of demonstration« nennt und als die Hauptsache der »science« bezeichnet, und er tröstet uns damit, daß uns die praktische Nutzanwendung seiner Geometrie (ohne Infinitesimalbetrachtungen) an anderer Stelle als außerordentlich groß dargetan werden würde. Hatte er vorher, durch seine »universal ideas« doch noch eine »demonstration« im Rahmen einer Geometrie ohne »abstract general ideas« zu retten vermocht, so ist es ihm jetzt nur noch möglich, die »science con-

1) These und Antithese Tr. § 130.

2) Tr. § 131. Ein Beweis dafür, daß keine der beiden Parteien Recht hat, findet sich nicht, es ist dies eine der schwächsten Stellen des mathematischen Teiles von Berkeley's System.

3) Die eingeklammerten Worte sind in der zweiten Auflage weggelassen.

4) Tr. § 131.

sidered as practical« zu erhalten; seine Polemik gegen die »infinitesimals« treibt ihn also in einen regelrechten offenen Empirismus hinein [1]).

Wie verhält es sich ferner damit, daß durch die neue Analysis einige zweifellos richtige Sätze entdeckt worden sind? Wie ist das möglich, wenn ihr ein Widerspruch zugrunde liegt? Berkeley verweist auch hier auf später; durch »a thorough examination« lasse sich zeigen, wie überflüssig und unnütz es sei, »infinitesimal parts of finite lines or even quantities less than the minimum sensibile« anzunehmen; ja, daß man es genau genommen sogar nie getan habe [2]).

Mit diesem Hinweis auf Späteres bricht der »Treatise« in zweiter Auflage die Untersuchungen über Mathematik ab. Wir machen noch einmal darauf aufmerksam, daß wieder nur der Gebrauch des Unendlich-Kleinen verwehrt werden soll. Man konnte unter Umständen die »thorough examination« schon für geliefert betrachten, durch die Newton'sche Fluxionsmethode.

Ein aufmerksamer Leser der ersten Auflage dagegen durfte diese Zuversicht nicht hegen. Denn da heißt es weiter: »And, whatever mathematicians may think of fluxions, or the differential calculus and the like, a little reflexion will shew them that, in working by those methods, they do not conceive or imagine lines or surfaces less than what are perceivable to sense« [3]). Hierbei mußte zweierlei auffallen. Erstens, daß die Fluxionsmethode nicht nur mit dem »calculus differentialis« auf eine Stufe gestellt wurde; das »and the like« schien sogar anzudeuten, daß die vielbewunderte, aber doch recht unsichere und arg befehdete »methodus indivisibilium« mit einbegriffen war. Und wenn die Angriffe Berkeley's gegen die »infinitesimals« zweifellos sich gegen die Differentialrechnung wandten, wenn diese in methodischer Hinsicht mit den Fluxionen identifiziert wurde, so mußte ein Anhänger der letzteren sich mindestens mitangegriffen fühlen. Zweitens mußte die Betonung des »perceivable to sense« jeden Mathematiker stutzig

1) Das soll nicht heißen, daß Berkeley durch seine Stellungnahme zur Mathemathik zum Empiristen geworden wäre, sondern nur soviel, daß in seiner Philosophie der Mathematik im »Treatise« sein Empirismus besonders deutlich hervortritt. Wir behandeln hier die Lehre im »Treatise«, nicht ihre Entwicklung.

2) Vgl. Tr. § 132. Man beachte, wie genau das, was hier als Leistung der »thorough examination« bezeichnet wird, mit dem übereinstimmt, was im »Analyst« geleistet wird.

3) Tr. § 132. In der zweiten Auflage weggelassen.

machen. Sollten die Beweise auf Sinneswahrnehmung gegründet werden?

So mußte ein unbefriedigtes Gefühl, als widerlegt behandelt, ohne widerlegt worden zu sein, einen modern-mathematisch gebildeten Leser zur Zeit Berkeley's erfüllen, höchstwahrscheinlich sehr verschieden von dem, was Berkeley am Schluß des »Treatise« wünscht: »For, after all what deserves the first place in our studies is the consideration of God and our Duty; which to promote, as if was the main drift and design of my labours, so shall I esteem them altogether useless and ineffectual if, by what I have said, I cannot inspire my readers with a pious sense of a presence of God and having shewn the falseness or vanity of those barren speculations which make the chief employment of learned men, the better dispose them to reverence and embrace the salutary truths of the Gosped, which to know and to practice is the highest perfection of human nature«[1]).

Als Hauptpunkte unserer Untersuchung sind folgende Lehren Berkeley's über die Mathematik festzulegen: Die mathematischen Prinzipien und die Ableitungen aus ihnen sind unantastbar, soweit sie nicht beeinflußt sind von den Irrlehren über die »abstract general ideas« und die »absolute existence of corporal objects«. Bei der Arithmetik zeigt sich dieser unheilvolle Einfluß in der Annahme abstrakter Zahlideen mit den Folgeerscheinungen von Zahlenspekulationen und -mysterien; bei der Geometrie in der »doctrine of the infinite divisibility of finite extension«, die die Infinitesimalbetrachtungen der Leibniz'schen und — was Berkeley nur in der ersten Auflage andeutet — auch die Fluxionsrechnungen der Newtonschen Schule nach sich gezogen hat. Arithmetik und Geometrie sind beides »praktische Wissenschaften« von Bezeichnungen, die nicht um ihrer selbst willen betrachtet werden sollen, sondern bei der ersteren auf Zählen von Gegenständen, bei der letzteren auf Messungen von Linien und Proportionen bezogen werden müssen. Beide haben nur so lange Wert, als sie mit Dingen arbeiten, die perzipierbar sind. Wieweit diese Gedanken brauchbar sind, um eine Philosophie der Mathematik zu begründen, werden wir später zeigen.

War das, was wir eben noch einmal zusammenfaßten, nur andeutungsweise als ein Angriff auf die damalige englische »modern analysis« zu verstehen, der von den Mathematikern als nicht durch-

1) Tr. § 156.

geführt füglich mit Stillschweigen übergangen werden konnte, bis die versprochenen Ergänzungen erschienen waren, so folgt nun im mathematischen Hauptwerk Berkeley's die offene Kampfansage. Die Festung des Dogmas wird verlassen, mit gleichen Waffen, und doch seinen Gegnern unendlich überlegen, steht er ihnen gegenüber, überall ihre Schwächen und Blößen erspähend, durch den »Analyst« das, was ihm heilig war, zu verteidigen.

II.

„The Analyst."

Freilich ist dieses Werk, wie sein Titel schon zeigt[1]), eigentlich nur in dem Sinne als eine Abwehrschrift zu bezeichnen, als hier Berkeley die Offensive für die beste Verteidigung zu halten scheint. Er zeigt hier eine Schärfe der Polemik, die ungemein gegen die vorsichtige und zurückhaltende Art im »Treatise« absticht. Es ist nicht mehr bloß von »speculations« die Rede, nicht mehr von einer »strange doctrine«, die, noch nicht einmal spezifisch mathematisch, die Ursache der »strange notions« der Geometrie ist; — von welchem Geist der »Analyst« geschaffen wurde, davon gibt uns am besten die Einleitung Kunde: »Persönlich sind Sie mir fremd, aber nicht fremd ist mir der Name, den Sie in dem Wissenszweige, welcher Ihr besonderes Studium bildet, erworben haben, und ebensowenig die Machtfülle, welche Sie in Ihrem Berufe ganz fremden Dingen beanspruchen, noch auch der Mißbrauch, welchen Sie und nur zu viele Ihresgleichen bekanntermaßen mit einer Ihnen nicht zukommenden Machtfülle treiben, um unachtsame Persönlichkeiten bei Fragen von höchster Bedeutung irre zu leiten, bei denen Ihr mathematisches Wissen keineswegs ausreicht, Ihnen die Eigenschaften eines berufenen Richters zu gewähren«[2]). Ueberall, wo von diesem Gegensatz die Rede ist[3]), tritt auch dieselbe abfällige Beurteilung zutage, wenngleich Berkeley bei seiner Gerechtigkeit nie vergißt, daß es auch Mathematiker gibt, die sich der Schranken

1) Der ausführliche Titel lautet: »The Analyst or a discours addressed to an infidel mathematician, wherein it is examined, wether the object, principles, and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith.« Berkeley nimmt also nicht sich oder seine Lehre als Objekt der Diskussion, sondern die seiner Gegner.

2) Die Uebersetzung stammt von Cantor, G. d. M. III, S. 759.

3) An. § 7, S. 261, § 50, S. 290; An. Qu. 15, 55, 63, 64.

ihrer speziellen Erkenntnis sehr wohl bewußt sind, und jenes Ueberschätzen der »modern analysis« nicht teilen. Später in der »Defence« hat er das ja noch ausdrücklich, irrige Meinungen seiner Gegner berichtigend, festgestellt[1]).

Nach der Einleitung beginnt Berkeley die eigentliche Untersuchung. Er fixiert zunächst die Aufgabe, die er sich im »Analyst« gestellt hat (§ 2), es folgen die Untersuchungen über die begriffliche Bestimmung des Objektes der Fluxions- und der Infinitesimalrechnung (§ 3 ff.). Im Hauptabschnitt werden die Methoden beider Rechnungsarten einer genauen Prüfung unterzogen (§ 9 ff.). Daran fügt er noch einige Erläuterungen der Fluxionen, wie sie zur Verbesserung der Newton'schen Bestimmungen damals versucht worden waren (§ 55 ff.). Den Beschluß bilden einige Worte über die »Metaphysik« der Mathematik und die »Queries«.

Wie scharf nun auch Berkeley auftreten mag, wenn es sich um den Anlaß handelt[2]), aus dem heraus seine Schrift erwachsen ist, so behält er doch einen kühl sachlichen Ton bei, sobald es

1) Vgl. Def. § 5, S. 303: »I do not say that mathematicians as such, are infidels; or that geometry is a friend to infidelity . . . . But I say, there are certain mathematicians who are known to be so . . . .« Ferner Def. § 6, S. 304: »There are, I make no doubt, among the mathematicians many sincere believers to Jesus Christ: I know such several myself . . . .« Vgl. ferner Def. App. § 2, S. 234.

2) Wie Berkeley dazu kam, gerade diesen Anlaß zu wählen, um das Erscheinen des »Analyst« zu unterstreichen, ist uns nicht möglich gewesen zu ermitteln. Es handelt sich bei dem, worauf Berkeley anspielt, um folgendes: Der im Januar 1719 verstorbene Dr. Grath soll nach dem Zeugnis von Addison auf dem Sterbebett christlichen Zuspruch verschmäht haben, weil ihn der berühmte Mathematiker Halley der Unbegreiflichkeit der christlichen Lehren versichert habe. Addison starb im folgenden Juni. Berkeley war aber damals in Italien und es ist nicht ersichtlich, daß er mit Addison in Briefwechsel gestanden habe. Und doch sagt Berkeley in der »Defence«: »He (Addison) assured me that the infidelity of a certain noted mathematician, still living, was the principal reason assigned by a witty man of those times for his being an infidel.« (Def. § 7, S. 306.) Da hier von Berkeley ausdrücklich auf das persönliche Zeugnis von Addison verwiesen wird, muß entweder Berkeley's Briefwechsel noch nicht gehörig durchforscht, oder überhaupt eine andere Begebenheit, als der Tod von Dr. Grath gemeint sein. Also mindestens 15 Jahre liegt das Ereignis zurück, an das sich der »Analyst« anschließt. Es ist doch zum wenigsten eigenartig, daß Berkeley in dem dazu sehr geeigneten »Alciphron« nichts davon erwähnt, während umgekehrt in der »Defence« auf den »Alciphron«, den »minute philosopher«, anpespielt wird. (Def. § 6, S. 304.) Warum aber suchte Berkeley einen so weit zurückliegenden Anlaß hervor? Diese Frage hat Berkeley in der »Defence« recht scharf zurückgewiesen; und, wie uns scheint, mit Recht — solange man aus ihrer Beantwortung Rückschlüsse auf die sachliche Berechtigung seines Angriffs ziehen will. (Vgl. Def. § 4, S. 303, § 12, S. 307.)

sich um die eigentliche Untersuchung handelt. Und wie weit auch dieser bedauerliche Anstoß in die Fragestellung des ganzen Werkes eingegangen sein mag [1]), so wird doch im Verlauf unserer Darstellung, wie wir hoffen, zutage kommen, daß das Gefühl des Gekränkt-Seins es nicht vermocht hat, den Scharfblick des irischen Philosophen zu trüben, so daß er vollständig ungestört, »sine ira et studio«, seine Erörterungen vornehmen kann.

Seine Aufgabe hat Berkeley zu verschiedenen Malen formuliert, am ausführlichsten im § 2: »It hath been an old remark that Geometry is an excellent Logic. And it must be owned that when the definitions are clear, when the postulata cannot be refused, nor the axioms denied, when from the distinct contemplation and comparison of figures, their proportions are derived by a perpetual well-connected chain of consequences, the object still being kept in view and the attention ever fixed upon them, their is acquainted a habit of reasoning, close and exact and methodical, which habit strangthens and sharpens the mind, and being transferred to other subjects is not unlike enquiry after truth. But how this is the case of our geometrical analysis, it may be worth while to consider«. Wir stellen im Gegensatz dazu noch eine andere Fixierung seiner Aufgabe, wohl die knappste, die er gegeben hat. Vor dem »Analyst« findet sich eine Reihe Ueberschriften zu jedem Paragraphen. In deren zwanzigster heißt es: »The geometrical Analyst considered as a logician and his discoveries not in themselves, but as derived from such principles and by such methods«. Was also geprüft werden soll, ist die Sicherheit der Prinzipien, d. i. der Objekte, Postulate und Axiome, und die Wissenschaftlichkeit der Methode der geometrischen Analysis.

Daher gelten seine nächsten Untersuchungen der Art und Weise, wie bei Newton die Grundbegriffe definiert werden: »Fluxions the great object and employment of the profound geometricians in the present age« [2]). Dabei entwickelt er, wie auch später in der »Defence« [3]) eine außerordentliche Kenntnis der hierhergehörigen Schriften Newton's, des »great author«, wie er ihn gerne

1) Vgl. An. § 2. Zum Folgenden bemerken wir: Berkeley sagt selbst: »But even in that case (daß es keine ungläubigen Mathematiker gibt) my remarks upon fluxions are mot the less true.« (Def. § 6, S. 304.)

2) An. Contents 3, S. 254.

3) Vgl. namentlich Def. § 23, S. 312, § 25, S. 313, § 27, S. 314, § 29, S. 316, § 32, S. 318, § 34, S. 320, § 36, S. 321 f.

nennt. Denn fast wortwörtlich übersetzend, läßt er die Definitionen folgen, wie sie Newton hat: »(Quantitates Mathematicas non ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero.) Lineae (describuntur ac describendo) generantur (non per appositionem partium, sed) per motum (continuum) Punctarum, Superficies per motum Linearum, Solida per motum Superficierum (,Anguli per rotationem Laterum, tempora per fluxum continuum et sic in ceteris)«, »(Considerando) igitur, quod quantitates aequalibus temporibus (crescentes et crescendo) genitae pro velocitate, qua crescunt ac generantur, evadunt maiores vel minores, methodum quaerebam determinandi Quantitates ex Velocitatibus Motuum (vel Incrementorum) Velocitates nominando Fluxiones et Quantitates genitas nominando Fluentes. — Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentum Augmenta aequalibus temporibus particulis quam minimis genita, et (ut) accurate (loquar) sunt in prima Ratione Augmentorum nascentium«[1]). Damit ist die eine Bezeichnungsweise von Newton[2]) dargelegt worden. Allein diese Methode der Berechnung durch Geschwindigkeiten ist nicht die einzige, und Berkeley bemerkt daher der Vollständigkeit halber: »Sometimes, instead of velocities, the momentaneous increments or decrements of indetermined flowing quantities are considered under the appellation of moments»[3]). Auch diese Zeilen enthalten eine fast wörtliche Uebersetzung Newton'scher Gedanken aus den »Prinzipien«[4]).

1) Newton, Intr. Qu. C., S. 203 f. Die in unserem Text in Klammern gesetzten Worte fehlen bei Berkeley, der folgendermaßen schreibt: »Lines are supposed to be generated by the motion of points, planes by the motion of lines, and solids by the motion of planes and whereas quantities generated in equal times are greater or lesser according to the greater or lesser velocity wherein they increased and are generated, a method has been found to determinate quantities from the velocities of their generating moments. Amd such velecities are called fluxions and the quantities generated are called flowing quantities. These fluxions are said to be nearly as the increments of the flowing quantities generated in the last equal particles of time; and to be accuracely in the first proportion of the evanescent increments.« (An. § 3, S. 259.)

2) Diese »various lights« der Newton'schen Rechnungsweise, wie sie ihr Erfinder gibt, sind ganz entschieden ein Nachteil gegenüber der einheitlichen Bezeichnung der Kontinentalanalysis. (Vgl. Anm. 4 zu S. 49 dieser Abh.) Sie legen aber auch Zeugnis dafür ab, wie sehr sich ihr Erfinder bemühte, seinen Methoden eine einwandfreie Grundlage zu geben.

3) An. § 3, S. 259.

4) Newton, Principia II, Sect. 2, Lemma 2, S. 55: »Quantitates . . . quasi motu fluxuve crescentes hic considero; et earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intellego . . . .«

Nachdem er dann noch den Satz aus Newton's »Quadratura« angeführt hat, »that the minutest errors are not to be neglected in mathematics«[1]), ein Satz, der wahrscheinlich zeigen soll, daß in der modernen englischen Analysis keine neuen Axiome eingeführt seien, fügt er noch die Definition der Fluxionen höherer Ordnung hinzu: »And of the aforesaid fluxions there be other fluxions, which fluxions of fluxions are called second fluxions. And the fluxions of these second fluxions are called third fluxions, and so on, fourth, fifth, sixth etc. ad infinitum«[2]).

Dann geht Berkeley unmittelbar und entschlossen zum Angriff über, alle Definitionen der Fluxionen, wie sie hier stehen, entbehren samt und sonders der Klarheit, da es den »senses« nicht möglich ist, eine »precise« und »clear idea«[3]) von den Momenten oder den Inkrementen und Dekrementen einer fließenden Größe »in statu nascendi« zu formen. Und nun erst die Fluxionen höherer Ordnung! Je genauer und schärfer man diese zu betrachten und zu erfassen sucht, um so flüchtiger werden die »ideas« von ihnen, um sich zuletzt ganz dem Geiste zu entziehen[4]).

Mit einem gewissen Gefühl der sicheren Ueberlegenheit wendet sich Berkeley zu der Betrachtungsweise der »foreign mathematicians«. »They suppose finite quantities to consist of parts infinitely little, and curves to be polygons whereof the sides are infinitely little . . «[5]). Aus diesen Worten erhellt, daß Berkeley, wenn er von dem »calculus differentialis« redet[6]), immer den Marquis de l'Hospital meint[7]). Dessen Lehrbuch »Analyse des infiniment petits« ist auch das einzige von ihm zitierte Werk über Differentialrechnung[8]). Berkeley's Polemik richtet sich ferner gegen Ansichten, die

1) Vgl. An. § 9, S. 263, sowie Newton Intr. Qu. C., S. 208.

2) An. § 4, S. 259, vgl. Newton, Qu. C., S. 206.

3) An. § 4, S. 259.

4) An. § 4, S. 260: »The further the mind analyseth and persueth these fugative ideas the more it is less and bewildered the object, at first fleeting and minute, soon vanishing out of sight.«

5) An. § 5, S. 260.

6) An. § 6, § 7, § 18, sowie § 21 ff.

7) In Def. § 38, S. 324 spricht Berkeley selbst von dem »Marquis de l'Hospital and his followers«, nicht mehr von Leibniz.

8) Das ist nicht weiter verwunderlich; denn l'Hospital's Lehrbuch war »das erste, lange Zeit das einzige, fast noch längere Zeit das am leichtesten lesbare Lehrbuch der Differentialrechnung.« Cantor G. d. M. III, S. 245.

schon von Leibniz ein Menschenalter vor Erscheinen des »Analyst« berichtigt worden waren, mit anderen Worten, nicht so sehr gegen den Meister, als vielmehr dessen »followers«[1]).

Das Objekt, von dem die »Analyse des infiniment petits« handelt, erkennt Berkeley zutreffend in den unendlich kleinen Differenzen endlicher Größen. Die Differenzen dieser Differenzen werden Differenzen zweiter Ordnung genannt, diese haben untereinander wieder unendlich kleine Differenzen, das sind die dritter Ordnung usf.. »without end or limit«. Schon in der Darstellung ist eine Gleichsetzung von Differenzen und Fluxionen zu spüren, und in der Tat trifft diese Differenzenreihe dieselbe Kritik, wie vorher die Reihe der Fluxionen und Momente. Es ist unmöglich, sich von ihnen eine klare »idea« zu verschaffen: »to conceive a quantity infinitely small — that is, infinitely less than any sensible or imaginable quantity, or any the least finite magnitude — is, I confess, above my capacity.« »but to conceive a part of such infinitely small quantity that shall be still infinitely less than it . . . is, I suspect an infinite difficulty to any man whatsoever . . .«[2]).

Bei der Infinitesimalrechnung hat der »Analyst« aber nicht nur an dem Objekt einen Mangel entdeckt, hier scheinen ihm auch die Postulate durchaus nicht jenen Grad von Sicherheit zu haben, den er denen der Alten, den »received principles«, zubilligt. Es liegt hierbei der einzige uns im »Analyst« bekannte Fall vor, daß Berkeley nicht wörtlich, und auch nicht den ursprünglichen Sinn eines Satzes so wiedergibt, wie er sich bei seinem Gegner findet. Denn er nimmt hier gleich die Folgerung für das Postulat selber: »We are to admit an infinite succession of infinitesimals, each infinitely less than the foregoing, and infinitely greater than the following.« »And (which is most strange) although you should take a million of millions of those infinitesimals, each whereof is

1) Genau genommen ist es natürlich nur der Marquis de l'Hospital, vielleicht auch dessen Nachahmer Stone (vgl. Anm. 3 zu S. 20 dieser Abh.), dessen Ansichten bekämpft werden. Daß Leibniz selber über die Anschauungen hinausgegangen war, wie sie noch de l'Hospital vertritt, lehrt folgende Gegenüberstellung: ». . . les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés . . .« und »Cependant . . . comme il n'est point vray . . . que le cercle est une espace de polygone régulier; neaumoins on peut dire que . . . le cercle termine . . les polygones réguliers.« Das erste Zitat findet sich bei de l'Hospital, Analyse Préface S. 2 (IV), das zweite bei Leibniz, Justification S. 106, also vom Mai 1702!

2) An. § 5, S. 260 f.

supposed infinitely greater than some other real magnitude, and add them to the least given quantity, it shall never be the bigger«[1]. Dieses, so behauptet Berkeley, sei das Postulat und der »cornerstone« der ganzen Differenzenrechnung de l'Hospital's. Bei dem Franzosen aber lautet die Stelle, auf die sich sein Gegner augenscheinlich bezieht, folgendermaßen: »On demande qu'on puisse prendre indifferément l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent anir'elles que d'une quantité infiniment petite; ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment mointre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même«[2]. Ebenso vergißt Berkeley zu erwähnen, daß de l'Hospital in der Einleitung zu seinem Werke gesagt hat: »D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité et sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes que je ne croys pas qu'elles puissent aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la manière des Anciens, si je ne me fusse pas proposé d'estre court sur les choses qui sont déjà connues et m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles«[3]. Doch hat diese ungenaue Zitierung keine sachliche Einschränkung des Angriffs zur Folge. Damit wäre vom Berkeleyschen Standpunkt aus schon die Unhaltbarkeit der »modern analysis« dargetan, und der Verfasser des »Analyst« hätte sich für seinen Teil vollkommen zufrieden geben können. Dann wäre aber diese Schrift als eine solche anzusehen, deren Wert lediglich davon abhängt, ob der immaterialistische Standpunkt Berkeley's beizubehalten sei, oder ob man ihn verwerfen müsse — also eine durchaus metaphysische Wertung. (Hierbei ist Metaphysik in dem engen Sinne des Wortes als spekulatives Denken genommen.) In der Tat erreicht die Abhandlung hier einen gewissen Abschluß, was sich in dem Gedankengang dadurch bemerkbar macht, daß Berkeley eine »Ruhe«pause einschiebt, die er dazu benutzt, um über die Irreligiosität der Mathematiker zu spötteln, die solche Sätze, wie er sie eben dem Leser vortragen mußte, glauben, während sie in der Religion den Skeptiker spielen[4].

1) An. § 6, S. 261.
2) de l'Hospital, Analyse Sect. 1, § 2, S. 2 f.
3) de l'Hospital, Analyse Préface, S. 13 f. (XIV).
4) An. § 7, S. 261; vgl. auch Def. § 3 ff., S. 303 ff.

Aber dabei — und das ist der neue Weg, den der »Analyst« im Gegensatz zum »Treatise« einschlägt — bleibt er nicht stehen, sondern er wirft eine neue Frage auf: »How you demonstrate«[1])? Die Untersuchung wird jetzt auf den wesentlichen Punkt gerichtet: Ist die Methode der Fluxions- (oder Infinitesimal-)Rechnung logisch einwandfrei oder nicht? Der Vorwurf, den er dabei den Mathematikern seiner Zeit macht, ist der, daß sie sich damit begnügt haben, eine ihnen dargebotene Methode deshalb für wissenschaftlich wertvoll zu erachten, weil sie in Einzelfällen ungemein brauchbar ist[2]).

Das tritt schon deutlich hervor bei folgender Einzeluntersuchung: »The main point in the method of fluxions is to obtain the ... momentum of the rectangle or product of two quantities« sagt er und beschreibt, Wort für Wort nach Newton die Methode: »Suppose the product or rectangle AB increased by continual motion and that the momentaneous increments of the sides A and B are a and b. When the sides A and B are difficient or lesser by the one half of their moments, the rectangle was:

$$\left(A-\frac{a}{2}\right)\left(B-\frac{b}{2}\right) \text{ i. e. } AB-\frac{aB}{2}-\frac{bA}{2}+\frac{ab}{4},$$

and as soon as the sides A and B are increased by the other two halves of their moments, the rectangle becomes:

$$\left(A+\frac{a}{2}\right)\left(B+\frac{b}{2}\right) \text{ i. e. } AB+\frac{aB}{2}+\frac{bA}{2}+\frac{ab}{4}.$$

From the letter rectangle subduct the former and the remaining difference will be aB + bA. Therefore the increment of the rectangle generated by the entire increments a and b is aB + bA«[3]). Vollkommen mit Recht verwirft Berkeley diese Schlußweise als eine »illegitimate and indirect«[4]); denn sie liefert in Wahrheit nicht

1) An. § 20, S. 270.

2) Vgl. An. § 10, S. 264: ». . . they are men rather to compute than to think . . .« sowie An. § 33, S. 280, § 47, S. 288; Def. § 13, S. 307 f.: »Two sorts of learned men there are: one who candidly seek truth by rational reasons. These are never adverse to have their principles looked into, and examined by the test of reason. Another sort there is who learn by rote a set of principles and a way of thinking which happen to be in vogue. These betray themselves by their anger and surprise, whenever their principles are freely canvassed.«

3) An. § 9, S. 263, vgl. Newton, Principia II, Sect. 2, Lemma 2, Casus 1, S. 56 f.

4) An. § 9, S. 263.

das »momentum« von AB, sondern, wie schon Claußen feststellt[1], das von $(A - \frac{a}{2})(B - \frac{b}{2})$ wenn die Momente der Seiten dieses neuen Rechteckes — um uns der Sprechweise jener Zeit zu bedienen — wieder a und b genannt werden. Deshalb zieht auch der »Analyst« den unmittelbaren Weg vor. Als Moment läßt er gelten: $(A + a)(B + b) - AB = aB + bA + ab$. Darin können nun aber a und b sein, was sie wollen: Momente, »increments«, Geschwindigkeiten, Fluxionen —; entweder das Produkt ab wird dem Moment anhaften, oder der ganze Ausdruck schmilzt auf ein Produkt von der Form aB oder bA zusammen, wenn er nicht überhaupt = O wird, — nie und nimmer wird man auf diesem einzig gerechtfertigten Wege zu dem Moment $aB + bA$ kommen.

Sehr interessant für uns und bezeichnend für das ganze Werk ist nun der nächste Abschnitt. Von der Frage ausgehend, wie Newton dazu gekommen sein mag, Methoden, deren Unvollkommenheit er selber zum mindesten ahnte[2], doch für streng wissenschaftlich[3] ausgeben zu können, und wie es komme, daß dieser Mann trotzdem so viele Schüler gefunden habe, die alle nach dem stolzen Namen der Wissenschaftler gierig sind, gelangt er zu folgender Betrachtung: »If a man, by methods not geometrical or demonstrative, shall have satisfied himself of the usefulness of certain rules which he afterwards shall propose to his disciples for undoubted truth; and by the help of nice and intricate notions; it is not hard to conceive that such his disciples may, to save themselves the truble of thinking, be inclined to compound the usefulness of a rule with a certainty of a truth and accept the one for the other . . .«[4].

Das bewußte Aussprechen dieses Gedankens, daß von einem »man of science« eben die »c e r t a i n t y of a truth« verlangt wird;

1) Vgl. Glaußen, S. 15.

2) Berkeley sucht dieses durch einen Brief Newton's an Collins zu beweisen; vielleicht hat er mit seiner Annahme nicht so ganz Unrecht, und möglicherweise kann die innere Unsicherheit des Erfinders der Fluxionen als Grund angesehen werden, weswegen er die »Methodus fluxionum« druckfertig in seinem Pult liegen ließ, ohne sie zu veröffentlichen. Vgl. Cantor, G. d. M. III, S. 196.

3) Daß Newton wenigstens zu Anfang dieser Meinung war, geht klar aus der Intr. Qu. C. hervor: »In finitis autem Quantitatibus Analysin sie instituere et finitarum nascentium vel evanescentium Rationes primae vel ultimae investigare, consonum est Geometria Veterum.«

4) An. § 10, S. 264.

das, was Kant den »sicheren Gang einer Wissenschaft«[1]) nannte; ferner die Erörterung pro et contra über diesen Gedanken in unserem Einzelfalle, das ist es, was dem »Analyst« in unsern Augen einen so hohen systematischen Wert verleiht. Er gibt sich nicht nur mit Einzelbetrachtungen ab, sondern benutzt sie als Probe aufs Exempel, als Experiment.

Doch bevor Berkeley zu diesen der neuen Analysis immerhin ziemlich gefährlichen Ausführungen schreitet[2]), faßt er zusammen, was sich von den Fluxionen Newton's denn nun positiv sagen läßt. Drei Möglichkeiten stehen den Mathematikern zur Verfügung. Entweder die Momente sind »mere limits«[3]), was für Berkeley gleichbedeutend mit »nothing« ist, oder »finite quantities«, oder — zwischen Nichts und Etwas — »infinitesimals«[4]). Der zweite und dritte Fall sind aber ausdrücklich von Newton verboten worden[5]), also bliebe nur noch der erste übrig; dann aber wären alle Momente — als Punkte — einander gleich und unteilbar, und auch das ist nach Newton unmöglich anzunehmen. Wie sich aber später zeigen wird, erscheint Berkeley die einzige Rettung des ganzen Kalküls, wenn man ihn nicht vollständig aufgeben will, auf dem Wege infinitesimaler Betrachtung zu liegen, den er freilich nicht beschreiben kann[6]).

Nun wendet Berkeley seine Angriffe gegen die Methode Newton's. Hier ist ein Punkt, in dem die Lehre Berkeley's über ihren früheren Bestand hinaus sich erweitert

1) Kant, Vorrede zur II. Aufl. der Kr. d. r. V. S. VII.

2) Vgl. Cantor, G. d. M. III, S. 745.

3) Was Berkeley unter »mere limit« versteht, sagt er nicht. Der moderne limes (= Grenzwert oder Grenzbeziehung) ist es sicherlich nicht; denn er schreibt in An. § 31, S. 279: »A point may be the limit of the line, a line may be the limit of a surface, a moment may terminate time . . .«

4) Vgl. An. § 11, S. 204.

5) Der zweite Fall in den »Principia« (Newton, Principia II, Sect. 2, Lemma 2): »Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulae finitae non sunt momenta sed quantitates ipsae ex momentis genitae.« Der dritte wird in der »Quadratuta« untersagt (Newton, Intr. Qu. C., S. 207): ». . . volui ostendere, quod in Methodo Fluxionum non opus sit Figuras infinite parvas in Geometriam introducere . . . »Sehr prägnant und geschickt hat Berkeley in der »Defence« diesen Widerspruch (oder »nur« Wandel?) der Newton'schen Lehren dargestellt. Vgl. Def. § 36, S. 321; sowie Cantor, G. d. M. III, S. 743.

6) Das systematische Verhältnis der beiden Rechnungsarten wird später erörtert werden, S. 50 f. dieser Abh.; vgl. auch O. I. S. 410. Ueber das historische Verhältnis vgl. Anm. 3 zu S. 46 dieser Abh.

hat. Noch im »Treatise« hatte er, wie wir sahen, ausdrücklich die Exaktheit der mathematischen Methode anerkannt, die Sicherheit, mit der sie von einem Schluß zum anderen fortschreite, sei unantastbar; jetzt ändert sich das Bild wesentlich für ihn[1]). Er knüpft an das Auffinden der Fluxion von x^n an, das er, genau an den »great author« sich haltend, wiedergibt[2]): x sei »a flowing quantity« und o ihr Inkrement. Wenn x nach x + o fließt, fließt x^n bis $(x + o)^n$ $= x^n + no \cdot x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oo \cdot x^{n-2} + \ldots$ Das Verhältnis der In-

1) Der Unterschied — um nicht zu sagen »Widerspruch« — der Schriften Berkeley's vor und nach 1734 ist ein für uns grundlegender. Er läßt sich kurz folgendermaßen charakterisieren: Im »Treatise« will Berkeley durch seine neue Grundlegung der Mathematik die »science considered as practical« retten (vgl. S. 31 f. dieser Abh.), im »Analyst« und noch schärfer in der »Defence« geht er gegen »logic«, »reasoning«, »demonstration«, kurz gegen die »theory« der Mathematiker vor, und verlangt von seinen Gegnern, diese zu verteidigen und zu rechtfertigen. Er spottet über die Mathematiker, die die Mathematik nur ihrer »practice« oder »usefulness« halber für eine Wissenschaft halten. Vielleicht hatte das Opponentenpaar des »Philalethes Cantabrigiensis« den »Treatise« Berkeley's zu Rate gezogen und aus dessen starker Betonung der »practice« und des »benefit of human life« geschlossen, Berkeley werde sich zufrieden geben, wenn »a thorough examination« die »usefulness« der Fluxionen darlege. (Daß dem »Philalethes« der »Treatise« bekannt war, ist wenigstens nicht gänzlich von der Hand zu weisen. Eine Bemerkung in der »Defence« scheint wenigstens darauf hinzudeuten. Jurin greift nämlich Berkeley wegen der Lehre der »abstract general ideas« an. Ihre Veröffentlichung sei in einem Werke »many years ago« geschehen, »in opposition to which« (dem Treatise?) Jurin sich als Anhänger der populären Meinung bekennt. Vgl. Def. § 45, S. 328.) Philalethes hat sich darin geirrt. Er hat eben, wie alle späteren Kritiken Berkeley's — soweit uns bekannt — den oben skizzierten Gegensatz zwischen »Treatise« und »Analyst« übersehen. Wir möchten bei dieser Gelegenheit noch folgendes erwähnen. In der »Defence« taucht wieder ein Schimmer des früheren, im »Treatise« vernachlässigten Unterschiedes zwischen Arithmetik und Geometrie auf. (Vgl. Anm. 2 zu S. 26 dieser Abh.) In Def. § 40, S. 325 wird, wenn auch nicht »geometry« allgemein, so doch »practical geometry« als gleichbedeutend mit »mixed mathematics« genommen.

2) Vgl. Newton, Intr. Pu. C., S. 206 f. »Fluat Quantitas x uniformiter et invenienda sit Fluxio Quantitatis x^n. Quo tempore Quantitas x fluendo evadit x + o, Quantitas x^n evadit $(x + o)^n$, i. e. per Methodum Serierum infinitarum

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} +; \text{ etc.}$$

Et Augmenta o et $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} +$; etc.

sunt ad se invicem, ut

$$1 \text{ et } nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ox^{n-2} +; \text{ etc.} \ldots«$$

kremente wird also $o : n . o . x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oo . x^{n-2} \ldots$; oder nach beiderseitiger Division durch o:

$$1 : n . x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} o . x^{n-2} + \ldots.$$

»Let now the increments vanish and their last proportion will be $1 : n . x^{n-1}$«, sagt Berkeley, wörtlich die »Introductio« der »Quadratura« wiedergebend: »Evanescant iam Augmenta illa at eorum ratio ultima erit 1 ad $n . x^{n-1}$«.

Gegen diese Schlußweise erhebt nun Berkeley Einspruch. Kurz vorher[1]) hatte er einen logischen Hilfssatz aufgestellt, den wir hier nur in einer späteren, den Vorzug der Kürze besitzenden Fassung wiedergeben: »Nothing is plainer than that no just conclusion can be directly drawn from two inconsistent suppositions«[2]). Derartige »two inconsistent suppositions« sind aber bei der eben angeführten Rechnung tatsächlich verwendet worden; denn ausgenommen den letzten Schritt war stets o von O verschieden gedacht und — zur äußeren Kennzeichnung dieser Sachlage — auch verschieden geschrieben worden[3]). Ohne diese Voraussetzung hätte auch nicht ein Schritt von Bedeutung geschehen können. Und dann wird, um den letzten Schritt zu ermöglichen, plötzlich diese wesentliche Grundlage nicht nur verworfen, sondern sogar in ihr Gegenteil verkehrt! Berkeley kann sich gar nicht genug darin tun, die Unzuläßigkeit dieser Schlußweise immer wieder aufs neue zu betonen, und führt das mit aller ihm zu Gebote stehenden Sorgfalt — man möchte fast Liebe sagen — aus[4]).

Uebrigens scheint ihm die eben besprochene Methode der Fluxionen in ihrem Fehler von der schon vorher erledigten Art, das »momentum« einer »quantity« AB zu finden, sich durch nichts zu unterscheiden, so daß wir auch jene frühere Untersuchung mit Recht zu denen über die Methode rechnen dürfen.

Ebensowenig — auch hier verweisen wir auf eine frühere Be-

1) An. § 12, S. 263: »If with a view to demonstrate any proposition, a certain point is supposed and such supposed point be itself afterwards destroyed or rejected by a contrary supposition; in that case all the other points attended thereby and consequent thereupon, must also be destroyed and rejected, so as from thenceforward to be no more supposed or applied in the demonstration.«

2) An. § 15, S. 266.

3) Vgl. hierüber Cantor, G. d. M. III, S. 156.

4) An. § 13—16, S. 265 ff.

merkung[1]) — scheint sich ihm die ganze Fluxionenmethode, wie sie sich eben darstellte, erheblich von der des »calculus differentialis« zu unterscheiden, den doch die Newtonianer so scharf bekämpfen. Denn es gehörte ein »wunderbarer Scharfsinn« dazu, ein »evanescent increment« von einer »infinitesimal difference« zu unterscheiden[2]). Ueber die Entstehung scheint er freilich gemäß dem »commercium epistolicum« zu denken[3]).

Man wird nun, meint Berkeley, zur Rechtfertigung der Fluxionsmethode vielleicht einzuwenden versuchen, daß die Größe o »infenitely diminished« und so der gemachte Fehler ebenfalls unendlich klein werde. Wenn man aber an dem Satze festhält, den Newton mit solchem Stolz aufgestellt hat: »In rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi«[4]), dann ist jeder derartige Rechtfertigungsversuch ausgeschlossen. Denn dann müßte man annehmen, daß »a quantity infinitely diminished, becames nothing«. »But according to the received principles, it is evident that no geometrical quantity can by any division or subdivision whatsoever be exhausted or reduced to nothing«[5]).

Wir machen hier auf zweierlei aufmerksam, daß uns die an und für sich befremdliche Ablehnung der Exhaustion verständlich machen kann. Erstens nämlich, wie sehr sich Berkeley an die

1) S. 43, Anm. 6 dieser Abh. Genaueres und Ausführlicheres s. S. 50 f. dieser Abh.

2) An. § 17, S. 366. » . . . a merveillous sharpness of discernment to be able to distinguish between evanescent increment and infinitesimal difference«.

3) Vgl. Cantor, G. d. M. III, S. 739 Anm. 1: »Wir dürfen hier aufmerksam machen, daß Berkeley über die Entstehung der Differentialrechnung als Engländer dachte. In § 18 des Analyst stellt er Fluxionstheorie und calculus differentialis einander gegenüber: »which method is supposed to have been borrowed from the former with some small alternations«.«

4) Vgl. S. 38 Anm. 1 dieser Abh.

5) An. § 17, S. 288. Zum folgenden Abschnitt sei gleich noch bemerkt: Die Deutung, die Berkeley dem Exhaustionsbegriff gibt, läßt sich mit Hilfe der »Defence« näher beschreiben. Er betrachtet »the method of exhaustion« als eine solche, »wherein quantities less than assignable are regarded as nothings«. Damit ist zugleich über sie das Urteil gesprochen; sie ist eine »illegitimate« Methode, und »a fluxionist writing about momentums« kann sich ihrer nicht bedienen, ohne die Sicherheit seiner Methode aufzugeben. (Def. § 32, S. 318). Jetzt fällt auch auf die Stelle des »Analyst« neues Licht. Um es zu erreichen, daß »a quantity even so small can be exhausted or reduced to nithing« mit andern Worten um das Ergebnis der Exhaustionsmethode zu erhalten, müßte man auch deren unwissenschaftliche Methode anwenden, auf legalem Wege — mit »division or subdivision« — richtet man nichts aus.

geometrische Größe o klammert; und fernerhin, wie unsicher und schwankend uns heute die Sprechweise anmutet, wie zweideutig namentlich das »reduced to nothing« ist, wie unklar dadurch der ganze »Exhaustions«begriff wird. So wird es Berkeley möglich, aus den verschiedenen Deutungen sich die auszusuchen, die seinem Zwecke am besten gelegen ist.

Der »Analyst« verläßt nun auf eine Weile die Betrachtung der Newton'schen Methode und wendet sich zu der de l'Hospital's. An dem Beispiel der Differenz eines Produktes zeigt Berkeley, hier genau dem Wortlaut der »Analyse des infiniment petits« folgend, daß die Befolgung des schon oben erwähnten Postulates[1]) tatsächlich »errores quam minimi« zur Folge hat, die bei der grundlegenden Wichtigkeit dieser Differenz das ganze pomphaft und anspruchsvoll aufgetürmte Gebäude der »Analyse« gefährden[2]).

Durch diese Untersuchungen ist tatsächlich nachgewiesen, daß die grundlegenden Sätze der Fluxions- und der Differenzenrechnung von den Mathematikern zu Berkeley's Zeit zwar entdeckt, aber nicht mit jener Sicherheit bewiesen worden sind, die der antiken Geometrie eigen ist, und dieser Wissenschaft bis dahin einen so hohen Rang zugesichert hatte[3]).

---

1) Vgl. S. 39 f. dieser Abh.

2) Mit welchen Ansprüchen die Vertreter der neuen Methode teilweise auftraten, zeigt eine Stelle des vielgelesenen Lehrbuches des Marquis de l'Hospital: »L'Analyse qu'on explique dans cet ouvrage, suppose la commune; mais elle en est fort différente. L'Analyse ordinaire ne traitte que des grandeurs finites; celle-ci penetre jusques dans l'infini même, elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences: et par là elle fait connoître ceux des grandeurs finies qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infini. On peut même dire que cette Analyse s'étend au delà de l'infini, car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisième, quatrième et ainsi de suite, sans de trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse seulement l'infini mais l'infini de l'infini ou une infinité d'infinis.« (de l'Hospital, Analyse Préface S. 1 (III)). Der Ausdruck, »sans de trouver jamais de terme qui la puisse arrêter«, ist bezeichnend für die Ueberspannung der Grenzen — wie so mancher anderer Erfindung, so auch — der Infinitesimalmethode. Man braucht nur an die Entstehungsgeschichte des »Analyst« und an die vielen Stellen in der »Defence« zu denken, in denen die Uebertragung auf das religiöse Gebiet gerügt wird.

3) Es ist an und für sich eine müßige Frage, ob Berkeley nur das mathematische Denken seiner Zeitgenossen bekämpft, oder ob er auch dem modernen entgegen-

Doch erinnert Berkeley im folgenden[1]) ausdrücklich daran, daß sich seine Ausführungen nicht gegen die Ergebnisse, sondern ausschließlich gegen die Schlußweise der »modern analysis« richten. Nicht die Resultate verwirft er[2]), sondern den Weg, auf dem die Mathematiker dahin gekommen sind, wünscht er sicherer zu sehen. Wie wir schon früher erwähnten, erkennt er der neuen Rechnung eine gewisse »usefulness« nicht ab[3]), auch bezweifelt er nicht, daß die mit ihrer Hilfe gefundenen Ergebnisse richtig sind; nur dieses Eine leugnet er ab, daß sie ein methodisch geschlossenes Ganzes bilden, daß sie den stolzen Namen von wissenschaftlichen Ergebnissen zu Recht führen[4]).

Durch dieses ausdrückliche Zugeständnis der Richtigkeit der Ergebnisse aber wird eine neue Frage aufgerollt. Könnte man denn nicht aus der Wahrheit der Resultate auf die der Prinzipien schließen? Ist es nicht ein Paradoxon, daß Mathematiker Wahrheiten entdecken und doch auf falschem Wege sein sollten? Diesen Satz sucht Berkeley nun zu entkräften, oder vielmehr seines widersinnigen Scheines zu entkleiden. Zum ersten ist diese Art und Weise des Schlusses unter Wissenschaftlern ganz und gar nicht gebräuchlich und logisch auch durchaus unzulässig[5]); zweitens kommt sie höchstens dann in Betracht, wenn die Ableitung der Ergebnisse von den Grundlagen wirklich glatt und fehlerlos ist. Das aber ist es ja gerade, was er im »Analyst« bestreitet! »And forasmuch it may perhaps seem an inaccountable paradox that mathematicians should deduce true propositions from false principles, be right in

---

treten würde, wenn er es kennte. Wir betonen das erstere deswegen so stark, weil wir es wissen, während wir das andere allerhöchstens vorsichtig hypothetisch meinen könnten. Der Satz Baumann's, daß Berkeley »nicht bloß die bis dahin vorliegenden Auffassungen« der Fluxionen und des Infinitesimalen bekämpfe, sondern auch »die ganze, ihnen zum Grunde liegende Vorstellungsweise«, ist daher mit Vorsicht aufzunehmen. (Baumann, Lehren, S. 449.)

1) An. § 20, S. 270.

2) Berkeley verfällt hier nicht in den Fehler, den der scharfsinnige Mathematiker Rolle beging. Vgl. Cantor, G. d. M. III, S. 276: »Was Rolle gegen die logische Grundlage der Differentialrechnung einwandte, blieb ergebnislos, weil er zugleich die Ergebnisse angriff und dabei Schnitzer über Schnitzer machte.«

3) Vgl. S. 41 dieser Abh.; ferner Def. § 13, S. 308; § 25, S. 313.

4) Vgl. u. a. An. § 20, S. 270.

5) An. § 19, S. 269: »But this inverted way of demonstration is contrary to the rules of logic.« »In every other science men prove their conclusions by their principles, and not the principles by the conclusions.«

the conclusion and yet err in the premises; I shall endeavour particulary to explain why this may come to pass and show how error may bring forth truth so it cannot bring forth science«[1]).

Zunächst prüft er die Rechnungen des Marquis de l'Hospital. Er behauptet dabei und sucht an Hand von Beispielen klarzumachen, daß sich in jedem einzelnen Fall die Treue des Resultates nur durch einen doppelten Fehler in der Schlußkette erklärt; alle Differenzenrechnungen de l'Hospital's sind eigentlich zweifache Verrechnungen: Einmal wird etwas zu viel und sofort darauf etwas zu wenig genommen, oder umgekehrt[2]).

Er hat keine Mühe und keine Weitläufigkeit gescheut, seinen Lesern diese Behauptung so klar wie möglich zu machen[3]); dabei zieht er auch Fälle in Betracht, in denen nur ein solcher Fehler vorzukommen scheint, und deckt auch hier manche Wahrheiten auf, die sich erst in neuerer Zeit wieder Bahn gebrochen haben, obwohl sie schon in den oben erwähnten Leibniz'schen Fortbildungen gesucht werden können[4]). Doch können wir hier die Einzelheiten seiner Untersuchung beiseite lassen.

Aehnlich, wenn auch nicht genau so, verhält es sich bei Newton. Dort werden nicht zwei Fehler gemacht, wohl aber zwei Größen — mit entgegengesetztem Vorzeichen auf denselben, mit gleichem auf verschiedenen Seiten der Gleichung stehend — unterdrückt, ohne daß ihre Gleichheit sofort einzusehen sei. Auch das zeigt Berkeley

1) An. § 20, S. 270.

2) Wir haben hier eine Gliederung der Berkeley'schen Gedanken gewählt, wie sie aus dem Wortlaut des »Analyst« nicht ohne weiteres ersichtlich ist. Dort scheinen die §§ 21—29 drei in sich abgeschlossene Teile derselben Lehre zu enthalten. § 21 ff.: Verrechnungen mit zwei »infinitesimals«. § 24: Rechnungen mit »finite quantities«, einem »infinitesimal« und scheinbar nur einem Fehler. § 26 ff.: »the doctrine premised« unter Benutzung von »evanescent increments«. Dieses, sowie die Gleichstellung der »doctrine of differences, or infinitesimals, or evanescent quantities, or momentums, or fluxions« (An. § 27, S. 276) mußte den von uns schärfer hervorgehobenen Unterschied der Erklärung von der Richtigkeit der Resultate bei de l'Hospital und Newton verwischen. Daß Berkeley trotzdem eine Verschiedenheit festgestellt haben wollte, geht aus der »Defence« hervor. (Vgl. Def. § 38, S. 324; § 40, S. 325.)

3) Wir meinen hier nicht nur die mathematischen Ausführungen — die mit umständlicher Breite behandelten Berechnungen von Subsangenten — sondern auch die vielen Bemerkungen allgemeiner Natur, die er einflicht. (An. § 23, § 25, § 27.)

4) z. B., daß die Tangente niemals gleich einer Sekante ist. (Vgl. Anm. 1 zu S. 39 dieser Abh.: ». . . il n'est point vray . . . que le cercle est une espace de polygone régulier . . . «).

mit aller Ausführlichkeit, namentlich an dem Beispiel der Kurven mit der Gleichung $y = x^n$[1]).

Ein Wort widmet Berkeley noch der »Verschiedenheit« beider Methoden[2]). Etwas spöttisch fragt er: Warum eigentlich zwei? Ist doch eine so unklar wie die andere. Warum hat man eigentlich erst Fluxionen, und dann noch »rationes primae et ultimae« eingeführt? Als Geschwindigkeiten sind die Fluxionen ja doch nicht nur von »time and space« abhängig, sondern allein durch diese erkennbar. Und ihre Verhältnisse sind unmittelbar proportional denen der zurückgelegten Wege, und umgekehrt proportional denen der Zeiten, die man dazu braucht. Es wäre also doch viel einfacher, diese Verhältnisse unter gänzlicher Hintansetzung der Fluxionen zu betrachten, was entschieden den Vorteil hätte, daß die betrachteten Objekte leichter erkenn- und meßbar sind; wie es die Infinitesimalmethode auch tatsächlich getan hat.

Freilich, wissenschaftlich würde Berkeley auch diese Rechnungsart nicht nennen können; für ihn gibt es nur einen Weg, auf dem der Mathematiker dieses Ziel erreichen kann: Das Vergleichen und Messen der Proportionen endlicher perzipierter Größen[3]), und das ist ohne Infinitesimalbetrachtungen möglich. Daran können auch die Fluxionen nichts ändern. Denn sie selber sind ohne »infinitesimals« nicht verständlich. Daher sind sie vollkommen unnötig, als Verbesserung keineswegs brauchbar[4]).

Einen Versuch Newton's, diese Schwierigkeit zu umgehen, das Unendlichkleine auszuschalten und die Fluxionen durch endliche Größen zu ersetzen, die ihnen unmittelbar proportional sind, weist Berkeley ebenfalls zurück. Mit einer großen Geschicklichkeit der Formulierung ordnet er den Beweis[5]), den der Erfinder der Flu-

1) Zu dem von Berkeley gegebenen Beispiel An. § 26, S. 275 sei eine textkritische Bemerkung gestattet: In beiden Fraser'schen Ausgaben von 1871 und 1901 (Vol. III, S. 275 und Vol. III, S. 36) wird aus der Gleichung $2\,xo + oo = yo + qoo$ nach Division durch o folgende zweifellos unrichtige Gleichung abgeleitet $2\,xo = y + qo$. Dann heißt es weiter: »And supposing o to vanish $2\,x = y$.« Dagegen findet sich in der zeitlich zwischen den zwei Fraser-Ausgaben liegenden Ausgabe von Sampson, London 1898 (Vol. III, S. 28) die zweite Gleichung mathematisch richtig angegeben: »$2\,x + o = y + qo$«.

2) An. § 30 f., S. 278 f.

3) Vgl. u. a. An. Qu. I, S. 290.

4) »The velocities or fluxions are said to be primo and ultimo as the augments nascent or evanescent. Take therefore the ratio of the evanescent quantities and it is the same with that of fluxions«. An. § 30, S. 278.

5) Dieser Beweis ist ein hervorragendes Beispiel dafür, wie Newton noch mit

xionen zu geben sucht, so an, daß er zwar genau übersetzt erscheint, aber doch den schwachen Punkt sofort erkennen läßt. In unsere moderne Sprache übersetzt, kommt es hierbei im wesentlichen darauf hinaus, daß das Verhältnis $\frac{0}{0}$ für Berkeley — der sich hierin der modernen Mathematik nähert — keinen festen Wert hat, sondern ein zunächst sinnloses Symbol ist[1]). Bei der Widerlegung des Newton'schen Beweises bedient sich Berkeley der geometrischen Wendung dieses Gedankens: Die Seiten eines Dreiecks, das auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist, können kein festes Verhältnis untereinander haben.

Damit sind im wesentlichen die Untersuchungen über die Methoden abgeschlossen. Bleibt auch die Nützlichkeit, und damit die praktische Anwendung, unbestritten, so ist doch durch die vernichtende und durchweg gerechte Kritik die Position der »modern analysis« als Wissenschaft bedenklich gefährdet. So blieb einem Vertreter der neuen Rechnung nichts übrig, als entweder auf die Entkräftung der Berkeley'schen Einwendungen zu sinnen, oder den Sinn der bisherigen Formulierung schärfer zu fassen, oder endlich sich mit der bloßen Technik zu begnügen. »But than it must be remembered that in such case, although you may pass for an artist, computist or analyst. you may not be a man of science and demonstration« [2]). So recht nun auch Berkeley mit diesem Satze hat, so wenig ausreichend ist doch seine Erklärung, — wenn er überhaupt eine gibt — was denn nun eigentlich von einem »man of science and demonstration« verlangt werde. Sowie er eine über das Wort »clearness« hinausgehende Antwort auf diese Frage zu geben versucht, meldet sich sein Sensualismus, und das verhindert jeden Mathematiker, mit Berkeley weiter zu disputieren.

Einige andere Methoden »to operate by symbols and suppositions in such sort as to avoid the use of fluxions, momentums, and infinitesimals . . .« [3]) werden nun noch besprochen. Es handelt

---

den Worten und Vorstellungen seiner Zeit ringt, und etwas Neues an ihre Stelle zu setzen versucht.

1) Nicht mit Unrecht warnt Berkeley wiederholt davor, derartiger Symbolik allzuviel zuzutrauen. Sie erscheint ihm sehr geeignet zur Bezeichnung, nicht zur Definition mathematischer Operationen. (Vgl. u. a. An. § 37, S. 287).

2) An. § 33, S. 280.

3) An. § 35, S. 282. Die Darstellung dieser Versuche erstreckt sich bis zum § 47. Sie behandelt in buntem Gemisch einige von den Meinungen, die Berkeley in der »Defence« als selber von Mathematikern gehörte angibt. Vgl. Def. § 44, S. 327 f.

sich hier um Versuche, die gemacht wurden, teils von Anhängern teils von Gegnern Newton's, um seine Methode zu »verbessern«. Wir begnügen uns hier mit der Wiedergabe eines von ihnen, weil er auch heute noch einiges Interesse erregen könnte. Man dividiere $x^3 - z^3$ durch $x - z$, das Ergebnis ist dann $x^2 + xz + z^2$. Setzt man in diesem Ausdruck $z = x$, so geht er in $3\,x^2$ über, also hat man auf rein algebraischem Wege die Fluxion von x^3 gewonnen. Gegen diese Gewinnung von $3\,x^2$ ist an und für sich gar nichts einzuwenden[1]; nur — und dagegen richtet sich auch Berkeley's Polemik — mit welchem Rechte nennt man das Ergebnis Fluxion? Einen Beweis für die Richtigkeit der Newton'schen Fluxion darf man jedenfalls in diesem Schluß nicht erblicken wollen; denn der »great author« hatte ja seine Fluxion ganz anders definiert, und ein Beweis müßte doch gemäß der Definition vorgehen.

Andere Versuche zur Erklärung Newton's können wir hier kurz überfliegen, da sie in sachlicher Hinsicht kein Interesse mehr bieten. Einige sagen, die Fluxionen seien »velocities of points generating a finite line«[2], andere: »Geschwindigkeiten von Differenzen«[3], wieder andere wünschen sie überhaupt durch »nascent or evanescent increments« ersetzt zu sehen[4], mehrere wollen die Fluxionen höherer Ordnung mit Hilfe von Differenzen erklären[5] — alle diese Versuche, die Sache der Fluxionen zu retten, scheitern an der Unklarheit der dabei benutzten Begriffe[6]. Es wäre also mit der Verschmelzung beider Methoden für Berkeley gar nichts gewonnen. Auch eine geometrische Versinnlichung bietet keine Hilfe. Man kann ja die Folge der Fluxionen . . ., $\overset{||}{z}$, $\overset{|}{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, . . .[7] an-

1) Noch heute gewinnt man so die »algebraische Ableitung« (Derivierte) einer ganzen Funktion. (Vgl. Weber, Algebra S. 53.) Sie wird aber als eine ganz neue Funktion betrachtet, die nicht so sehr ihrer Entstehung nach, als vielmehr durch gewisse Gesetzmäßigkeiten einen Zusammenhang mit der ursprünglichen Funktion zeigt.

2) An. § 36, S. 283.

3) An. § 38, S. 284.

4) An. § 39, S. 285.

5) An. § 38, S. 284.

6) Denn manchmal wird es nötig sein, »a time infinitely diminished« anzunehmen, oder »an infinite part of time«, oder eine Bewegung, die in einem Punkte stattfinde und in einem Augenblick, was soviel hieße, wie sie »abstracted from time and space« zu betrachten — kurz man verliert sich immer in »vain abstractions«.

7) In beiden Fraser'schen Ausgaben findet sich die Reihe der Fluxionen, wie folgt: »$z.\ z.\ z.\ \dot{z}.\ \ddot{z}.\ \dddot{z}.$« (Vol. III, S. 287 und Vol. III, S. 49). Dagegen ist in der

setzen und jedes ihrer Glieder als Ordinate einer Kurve betrachten, deren Flächeninhalt jedesmal der vorhergehenden Fluxion gleich ist. Das ist aber nur als Interpretation, nicht als Definition von Wert. So daß immer noch die Frage offen bleibt: »What these fluxions are!«

Dieser Frage kann man sich nun auch schlechterdings nicht entziehen, wenn man einigen Wert auf Klarheit und Sicherheit legt, — (es ist eigenartig, wie scharf Berkeley diesen Punkt hier hervorhebt, während er im »Treatise« nicht immer genügend darauf Acht hat) — weder dadurch, daß man die Fluxionen nur als »scaffold of building« zu benutzen vorgibt[1]) und sich ihrer nicht mehr bedienen will, sobald man durch sie andere Wege gefunden zu haben glaubt; noch auch, indem man diese ganzen Untersuchungen eben für die »Metaphysik« der Mathematik erklärt. Denn »It is nevertheless certain that to follow him (Newton) in his Quadratures, they must find fluents from fluxions, and in order to this they must know to find fluxions from fluents; and in orde to find fluxions, they must first know what fluxions are«[2]).

Im letzten Abschnitt[3]) kommt Berkeley noch einmal auf seinen ursprünglichen Zweck zurück; was er sich zu beweisen vorgenommen hatte, hat er dargelegt: Daß die »modern analysis« »neither good geometry nor good logic«[4]) ist, daß ihre Schlußweise demgemäß nicht einfach auf andere Gebiete der Forschung übertragbar ist; denn wenn sie noch nicht einmal auf ihrem eigenen Gebiete das leistet, was sie verspricht und was man von ihr erwarten könnte, wie will sie es auf anderem, ihr ursprünglich fremden tun? So kommt Berkeley in seinen Gedanken wieder auf den Ausgangspunkt seines Werkes zurück, nicht in logischem Zirkel, sondern zu sachlicher Abrundung.

Ausgabe von Sampson (Vol. III, S. 40) dieselbe Reihe so wiedergegeben: »$\overset{||}{z}$, $\overset{|}{z}$, z, $\dot{z}$, $\overset{::}{z}$, $\overset{.\cdot.}{z}$,.« Bei Newton endlich findet sich an der Stelle, auf die Berkeley Bezug nimmt: »$\overset{||}{z}$, $\overset{|}{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\overset{.\cdot.}{z}$, $\overset{::}{z}$, $\overset{.::}{z}$, ...« (Newton, Qu. C., S. 208). Genau so findet sich auch die Reihe in sämtlichen drei Ausgaben der »Reasons« in deren § 16. (Fraser, Vol. III, S. 347 und Vol. III, S. 110, Sampson Vol. III, S. 107.)

1) Vgl. An. § 43, S. 286 f.

2) An. § 47, S. 288.

3) An. § 50, S. 290.

4) An. § 30, S. 271; ferner die Form der Aufgabe, wie wir sie S. 49 ff. dieser Abh. entwickelt haben.

Anschließend läßt er noch einige »Queries« folgen, eine Repetition des eben Besprochenen in Frageform, die sachlich im wesentlichen nichts Neues bietet und, soweit angängig, bereits berücksichtigt worden ist.

Wir haben die Problemlage des »Analyst« deswegen einmal etwas genauer dargestellt, weil sie bisher in ihrer systematischen Bedeutung — der Frage nach der Wissenschaftlichkeit der neuen Rechnung — garnicht, selten in ihrer historischen recht gewürdigt worden ist. Auf diese wollen wir nun noch mit einem Worte hinweisen.

III.

Maclaurin's Entgegnung. Stellung des modernen Grenzbegriffes.

Die Wende des 17. und 18. Jahrhunderts war für die Geschichte der höheren Analysis eine bedeutsame Zeit. Die fast gleichzeitige Erfindung zweier mathematischer Methoden, der Differential- und Fluxionsrechnung, und die damit sofort einsetzende Frage nach ihrer Natur und Sicherheit, sowie ihrem Verhältnis zu den bisher bekannten Operationsmöglichkeiten, dann die Frage nach ihrer Anwendbarkeit im Transzendenten (Weltanschauung, Religion) scheint damals in den gebildeten Zirkeln großen Aufruhr verursacht zu haben. Ob ihre Erfinder ganz genau erkannten, was sie eigentlich in ihrer glücklichen Stunde gefunden hatten, wieweit die Grenzen ihres Kalküls gingen, welche Gegenstände in seinen Bereich fielen, ist eine Frage, deren Beantwortung uns vollkommen ferne liegt. Mancher ihrer Schüler mag diese Grenzen nicht gesehen und ihr Gebiet für unbeschränkt erachtet haben, mancher auch dadurch die ganze glänzende Erfindung diskreditiert haben, und so mitschuldig sein an dem Kampfe, der nun zwischen Mathematikern und Laien auf beiden Seiten um das Für und Wider nicht ohne Erbitterung ausgetragen wurde. Wir haben ja eben gesehen, aus welchen Anlässen heraus eine Streitschrift entstehen konnte, und wie viel Scharfsinn dabei verwendet wurde, den nun einmal provozierten Standpunkt auch öffentlich vor der Gelehrtenwelt zu rechtfertigen. Weniger wohl dadurch, daß nun die Gegner der modernen höheren Analysis tatsächlich ihre Einwände sachlich durch Gegengründe entkräftet fühlten, als durch die glänzenden Erfolge,

die namentlich der Leibniz'sche Kalkül auf physikalischem, mechanischem und rein mathematischem Gebiet errang, verstummte dann aber der Kampf, und ganz allmählich suchte und fand nun die neue Methode ein festes, durchaus einwandfreies Fundament.

Bei dieser Grundlegung durch seinen Angriff eine nicht unwesentliche Rolle gespielt zu haben, ist die für die Geschichte der Mathematik bedeutsame Stellung Berkeley's. Daß tatsächlich durch einen Theologen Mathematiker veranlaßt werden, die Grundlagen ihrer Wissenschaft einer ausführlichen Betrachtung zu unterziehen, werden wir gleich sehen. Diese Tatsache ist an und für sich schon keine gewöhnliche Erscheinung im Bereich der Mathematik [1]). Noch merkwürdiger ist freilich, daß trotz der präzisen Fragestellung im »Analyst« das Problem dem Gegnerpaar Berkeley's, dem »Philalethes Cantabrigiensis« und Walton, nicht klar wurde. So flogen einige Streitschriften hin und wieder, bis sich endlich ein Mathematiker fand, der den Gedanken des »Analyst« in seiner ganzen Tiefe erfaßte. Daher richtete sich seine Schrift — wir meinen Benjamin Robins' »Verteidigung der Methode Newton's« [2]) — mehr gegen Berkeley's Gegner als gegen den »Analyst«.

Das bei weitem großartigste Werk in der Reihe der sich an den »Analyst« anschließenden Schriften war eine Arbeit von dem englischen Mathematiker Collins Maclaurin; und wir wollen wenigstens ganz kurz hier Maclaurin's »Treatise« als eine Art Gegenstück zum »Analyst« behandeln. Die Fülle des mathematischen

---

1) »In der Tat, eine bemerkenswerte Erscheinung auf dem Gebiet der mathematischen Disziplinen! Die Wissenschaft wächst von Tag zu Tag auf schwankendem Grunde, und nur dadurch hat man eine sichere Gewähr für die Richtigkeit der mit ihrer Hilfe gewonnenen Resultate, daß auf eine andere unzweifelhafte Weise dieselben Resultate erhalten werden.« Gerhardt, Analysis, S. V.

2) Der genaue Titel von Benjamin Robins' Schrift lautet: »A discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's methods of fluxions and of prime and ultimate ratios« (1735). Sie war gegen niemanden persönlich gerichtet, aber mit Streitschriften verwandt, die Robins und Pemberton gegen Jurin schrieben. Den Kern der Abhandlung erblickt Cantor in folgendem Satze: »Nähert sich eine veränderliche Größe durch fortwährende Zu- oder Abnahme einer bestimmten Größe, ohne sie je zu überschreiten und kann der Unterschied zwischen der bestimmten Größe und der sich ihr nähernden Veränderlichen kleiner als irgendeine noch so kleine angebbare Größe gemacht werden, so nimmt man an, die Veränderliche werde schließlich der bestimmten Größe gleich.« Dasselbe gilt auch für Verhältnisse von Größen. Man vergleiche hiermit die Fassung, die Maclaurin dem Gedanken gegeben hat (S. 58 dieser Abh.).

Einzelwissens — Maclaurin wollte ja ein Lehrbuch der Fluxionsrechnung geben — lassen wir beiseite; uns interessiert nur, wie das Berkeley'sche Problem gelöst wird [1]).

Daß Maclaurin tatsächlich im Anschluß an Berkeley gearbeitet hat, das heißt, daß ihn die Angriffe des »Analyst« bewogen, seinen »Treatise« in der uns vorliegenden Gestalt herauszugeben, darüber läßt er uns nicht den mindesten Zweifel: »A letter published in the Year 1734 under the Title of the »Analyst« first gave occasion to the ensuing Treatise . . .«. Maclaurin fährt dann fort: »The Author of that Piece had represented the Method of Fluxions as founded of false Reasonings and full of Mysteries« [2]). Schärfer konnte man die Frage des »Analyst« kaum hervorheben. Dieser Sachlage entsprechend geht denn auch Maclaurin vor. Ihm kommt es darauf an, die Sicherheit der Fluxionsmethode zu zeigen, sie als einen Zweig der Mathematik zu charakterisieren. Gleich zu Beginn seines Werkes gibt er darum die Beschreibung: »The mathematical sciences treat of the relations of quantities to each other and of all the affections that can be subjected to rule or measure« [3]). Er zielt nun hauptsächlich darauf ab, die Mathematik so zu begrenzen, daß auch die Fluxionen nicht aus ihrem Rahmen herausfallen, sondern mit in den Bereich der »mathematischen« Objekte gehören. Darum erklärt er die »relations« und »affections« ausführlicher, wie folgt: »They (the m. sciences) treat of the properties of figures that depend on the position and form of the lines or planes that bound them, as well as those that depend on their magnitude, of the direction or motion, as well as its velocity; of the composition and resolution of quantities and of every thing of this nature that is susceptible of a regular demonstration.« Damit sind die Fluxionen in den Lehrplan der Mathematik aufgenommen. Es handelt sich nun darum, zu zeigen, daß auch wirklich eine »regular demonstration« bei ihnen möglich ist, und das will Maclaurin. Einen Einwand Berkeley's nach dem anderen entkräftet er. So hatte Berkeley z. B. gesagt, die Bewegung eines Punktes während eines Augenblickes sei etwas Unfaßbares und nur zu verstehen, wenn man die Geschwindigkeit als »abstracted from time and space« betrachte. Gerade bei der Widerlegung dieses Einwandes scheint

1) Der erste Band des Werkes war schon 1735 gedruckt, wenngleich das ganze Werk erst 1742 erschien.

2) Maclaurin, Treatise Preface, S. II.

3) Maclaurin, Treatise I 1, § 1, S. 51.

sich das zu bestätigen, was Maclaurin über den Berkeley'schen Angriff gesagt hat: »His objections seem to have been occasional by the concise Manner, in which the Elements of this Method has been usually described; and their have been so much misunderstood by a Person of his abilities appeared to me a sufficient Proof that a fuller Account of the Grounds of them was requisite«[1]). Maclaurin faßt nämlich die Augenblicksbewegung eines Punktes nicht, wie Berkeley[2]), als notwendig mit einer Abstraktion verbunden, sondern als Metapher auf. Man mißt natürlich Geschwindigkeiten durch zeitliche und räumliche Größen, und es hätte insofern keinen Sinn, eine Geschwindigkeit messen zu wollen, die nicht innerhalb einer meßbaren Zeit vor sich geht. Das ist ja aber auch garnicht gemeint. Die Geschwindigkeit eines Punktes während eines Augenblickes ist vielmehr die, welche der Punkt haben würde, wenn er sich weiterhin gleichförmig bewegte[3]). In dieser Art Widersprüche als Mißverständnisse infolge gar zu knapper Fassung der bisherigen Darstellungen aufklärend, bemüht sich Maclaurin, manche andere Entgegnung von Berkeley zu erledigen. Auf eine davon werden wir später noch zurückkommen.

Die Methode, die er in seinem »Treatise« vortragen will, bestimmt er in Anlehnung an Newton und ganz verschieden von de l'Hospital, an den nur die Einteilung in eine »common geometry« im Gegensatz zu der von ihm vorgetragenen Lehre erinnert: »In geometry there are various ways in discovering the affections and relations of magnitudes that correspond to their several methods of enquiry. In the common geometry we suppose the magnitudes to be already formed, and compare them or their parts immediately or by the intervention of some others of the same kind to which they have a relation, that is already known. In the doctrine we propose to explain and demonstrate in this treatise, we have recourse to the genesis of quantities, and either deduce their relations by comparing the powers which are conceived to generate them; or by comparing the quantities that are generated we discover the relations of those powers and of any quantities that are supposed to be represented by them«[4]). Der »Treatise« ist also ein Lehrbuch der direkten, wie auch der inversen Fluxionstheorie.

1) Vgl. Maclaurin, Treatise I 1, § 8, S. 56.
2) An. § 31, S. 279.
3) Maclaurin, Treatise I 1, § 8, S. 56.
4) Maclaurin, Treatise I 1, § 2, S. 52.

Das Hauptgewicht bei der Fundierung seiner Methode legt Maclaurin — wie der oben erwähnte Benjamin Robins — auf die Entwicklung des Begriffes der »rationes primae et ultimae« als der Basis seiner ganzen Lehre. Ihn beschreibt er folgendermaßen: »In general, it appears . . . that, when two veriable Quantities, AP and AQ which always are in an invariable reason to each other, approach at the same time to two determined Quantities AB and AD, so that they may differ less from them than by any assignable measure, the ratio of their limits AB and AD must be the same as the invariable ratio of the Quantities AP and AQ, and this may be considered as the most simple and fundamental proposition in this doctrine«[1]. Diese seine Methode glaubt er in den Untersuchungen der antiken Geometer bereits angedeutet zu finden: »In the same manner the ancients have demonstrated that pyramids of the same height are to each other as their bases . . .«[2]. Wir begegnen hier also dem Versuch, die neue Analysis durch eine Art »Exhaustion«[3] zu begründen und gleichzeitig sie auf die Antike zurückzuführen[4].

Durch diese Gegenüberstellung, die wir später noch zu ergänzen Gelegenheit finden werden, wird die Stellung Berkeley's um vieles klarer. Die historische Bedeutung unseres irischen Denkers entbehrt nicht einer gewissen tragischen Ironie. Sie besteht darin, daß durch sein Werk einer der hervorragendsten Mathematiker veranlaßt wurde, sich mit den Grundlagen seiner Lehre ausführlich zu befassen; wobei er fand, wie wir später sehen werden, wie unhaltbar das Berkeley'sche Denken ist, so scharfsinnig es auch genannt werden muß. Durch seine Theorie der Mathematik wurde die Vernichtung seiner Philosophie herausgefordert.

Damit ist nun zugleich gesagt, wieweit die systematische Bedeutung Berkeley's für den Mathematiker geht. Nämlich nur so-

---

1) Maclaurin, Treatise Intr., S. 6.

2) Daß Berkeley mit einem Satz nicht gedient ist, in dem »Größen kleiner, als irgendeine angebbare Größe« vorkommen, haben wir früher (S. 46 Anm. 5 dieser Abh.) bereits erörtert, diese aber treten nicht in dem Lemma des Euklid (S. 13 dieser Abh.) auf. Ob also die »Exhaustionsmethode« von Maclaurin dieselbe ist, wie die der Alten, ist nicht so ohne weiteres ersichtlich.

3) Maclaurin, ebenso wie Newton, bemüht sich nun, zu zeigen, daß die neue Methode, übereinstimmend sei (consonum) mit der der Alten, de l'Hospital dagegen bemüht sich, die antike Geometrie mit einer gewissen Pietät auf die Seite zu schieben, um dem »Neuen« Platz zu machen.

4) Maclaurin, Treatise Intr., S. 6.

weit, wie seine Hauptgedanken im »Analyst«. Wir können ihm nur bis zu der negativen Feststellung folgen, daß es auf dem Wege de l'Hospital's überhaupt nicht, auf dem von Newton und Leibniz nur dann weitergehen konnte, wenn man deren Anschauungen modifizierte. Dazu hatten diese beiden selbst schon Handhaben geboten, der erstere in dem Ausdruck »rationes primae et ultimae«, der andere in dem Satz: »Le cercle termine les polygons réguliers«[1]). Damit sind wir aber bereits zu unserer abschließenden Frage gekommen, die wir an die Betrachtung Berkeley'scher Werke jetzt anschließen wollen.

Es hätte heute freilich kaum noch Sinn, einfach die Frage des »Analyst« zu wiederholen; denn an der Sicherheit der mathematischen Methoden in der Differential- und Integralrechnung ist jetzt nicht mehr zu rütteln. Wir stellen auch demgemäß die Frage ganz anders, nämlich: Die Bedeutung des Grenzbegriffes für eine Mathematik als Wissenschaft festzustellen.

Damit suchen wir zweierlei anzudeuten, daß wir die Frage der Philosophie der Mathematik aufgenommen haben, und daß wir diese an einem Einzelproblem kenntlich zu machen versuchen. Dieses soll nun im folgenden herausgehoben und näher analysiert werden. Eine endgiltig abschließende Antwort ist freilich, wie das Folgende zeigen wird, nicht immer möglich; wenn überhaupt eine Antwort gegeben wird, so ist sie nur als Versuch einer Auflösung der gestellten Frage anzusehen.

Wenn wir fragten: »Was bedeutet der Grenzbegriff für eine Mathematik als Wissenschaft?«, so haben wir damit als Objekt der Diskussion nicht nur den Begriff der Grenze, sondern auch den der Wissenschaft und den der Mathematik aufgenommen. Und die Frage, die eben gestellt wurde, ist keine andere, als die nach dem Verhältnis dieser drei Begriffe untereinander. Sie müssen natürlich erst vor allen Dingen klargelegt und bis auf die letzten Gedankenelemente, die in ihnen liegen, aufgelöst werden, man muß sie selber kennen, wenn man ihr Verhältnis genau bestimmen will[2]).

Bei dem Begriff der Wissenschaft ist uns freilich die Aufgabe bereits gelöst überliefert worden. Wissenschaft ist einheitlich geordnetes Bewußtsein[3]). Ein Etwas ist dann wissenschaftlich erfaßt,

1) Vgl. Anm. 5 zu S. 46 dieser Abh.

2) Vgl. An. § 30, S. 278.

3) In der folgenden Bestimmung von Wissenschaft, absolut und objektiv richtig, Form und Stoff haben wir die Gedanken von Rudolf Stammler wiederzugeben versucht.

wenn es nach einem unbedingt einheitlichen Plan in das Ganze des Geisteslebens eingefügt ist. Das Gegenteil davon, das Unwissenschaftliche oder Subjektive besteht also darin, daß eine solche schlechterdings bleibende Einheitlichkeit des Planes nicht bestehe, wir vielmehr von Einzelheit zu Einzelheit getrieben würden, ohne das sie einigende Band zu finden. Auch diese letztere Grundauffassung ist ja möglich, und sie findet sich implicite bei manchem Philosophen[1]), wenn sie auch selten genug so grob ausgesprochen wird. Wenn man sie aber erst einmal angenommen hat, so bleibt tatsächlich nichts übrig, als »in Zweifelssucht verloren, die Hände in den Schoß zu legen«[2]); denn dann ist es unmöglich, etwas zu beweisen — also nicht einmal die Wahrheit dieser Grundüberzeugung — weil beweisen soviel heißt, wie dartun, daß sich etwas einheitlich erfassen läßt.

Erkennt man daher die Möglichkeit der wissenschaftlichen Art des Denkens als letzten Halt der Gedanken an, so findet man damit zugleich und unzertrennlich verbunden den Gegensatz von richtig und unrichtig, und ferner den von Form und Stoff.

Richtig möchten wir nämlich für identisch erklären mit: einheitlich sich einfügend. Hier ist nun zu unterscheiden zwischen absolut und objektiv richtig. Absolut, d. h. unbedingt richtig kann nur die Art und Weise des Ordnens sein, wenn sie schlechterdings bleibend ist. Objektiv richtig ist aber, was an unserem Erleben als bedingt erkannt und wissenschaftlich bearbeitet ist. Wir haben uns hier, wie das eben in der Natur der Sache liegt, schon des Gegensatzes von Form und Stoff bedienen müssen, wenngleich wir diese Worte vermieden haben. Denn Form heißt nichts anderes als die denknotwendige Bedingung, während der Stoff eines Erlebnisses das dadurch Bedingte darstellt. Unter einer reinen Form verstehen wir nun diejenige Bedingung, die durch kein Erlebnis irgendwelcher Art notwendig bedingt wird. »Notwendig«, das ist die Eigenschaft eines Gedankens, der nicht außer acht gelassen werden kann, wenn Einheit in unserem Geistesleben herrschen soll[3]). Absolut richtig können demnach nur reine Formen sein.

1) Jeder Skeptiker, ja jeder, der nichts anderes, wie »matters of fact« anerkennt, verfällt schließlich dem Subjektivismus.

2) ». . . sit down in a forlorn Scepticisme . . .« Tr. Intr. § 1 (Ueberweg, S. 2).

3) Wir hoffen, durch diese Beschreibung des Gedankens »notwendig« eine Verwechslung mit dem Begriff eines nur kausal bedingenden Einordnens unmöglich gemacht zu haben.

Wir konnten diese Untersuchungen nicht in der vorhergesagten Art anstellen, da sie den Anfangspunkt abgeben, der uns unverrückbar erscheint und zugleich maßgeblich für alle ferneren Betrachtungen sich erweisen muß. Damit wäre der erste Teil unserer Aufgabe gelöst und zwar so: Setzen wir als Ausdruck für alles überhaupt denkbare Erleben das Wort Bewußtsein, so bedeutet Wissenschaft dasselbe wie einheitlich geordnetes Bewußtsein.

Dieser Gedanke ist nun »nur« eine Idee[1]), insofern als seine restlose Erfüllung in unserer menschlichen Wirklichkeit nicht vorkommen kann. Aber das Streben nach ihm ist durchgängig zu finden und von altersher hat man sich bemüht, wenn man auch eine durchgängige Ordnung alles je denkbaren Stoffes als ausgeschlossen erkannte oder fühlte, doch wenigstens die Methoden zu finden, die absolut ordnend allüberall eingreifen müssen, man hat gesucht und geforscht nach dem System der reinen Formen menschlicher Erkenntnis.

Da war nun ein Stamm des Wissens, der Stolz des Menschengeschlechtes, die Mathematik[2]). Ehern fest schienen ihre Gesetze,

1) (Vgl. Anm. 3 zu S. 21 dieser Abh.) Hier wird ersichtlich, warum wir das Berkeley'sche »idea« nicht durch Idee wiedergaben. Den Gedanken eines unbedingt giltigen Verfahrens, den Inhalt alles irgend Erfaßbaren einheitlich zu ordnen, nennen wir Idee. (Vgl. Rudolf Stammler, Theorie, S. 239; Kant Kr. d. r. V. S. 600 f.)

2) Wir möchten doch nicht verfehlen, auf folgenden Gedankengang hinzuweisen. Im »Corpus iuris civilis« (codex Iustinianus IX, 18, S. 379) findet sich die schöne Zusammenstellung: »De maleficis et mathematicis et ceteris similibus.« Und zwar heißt es: »1. Artem geometriae discere atque exerceri publice intersit. ars autem mathematica damnabilis interdicta est.«, sowie später: »5. Nemo haruspicem consulat aut mathematicum, nemo hariolum . . .«. Dieses Urteil römischer Juristen klingt nicht sehr nach Hochschätzung mathematischer Künste. Brisonius erklärt uns in seinem Lexikon (De verborum, S. 608) ausführlich, wie solches kam: »Mathematicorum honestum nomen, earum disciplinarum quas solas prae ceteris μαθημάτων appelatione, Graeci . . . dignati sunt, professoribus inditum male tandem audire Romae coepit: infamatum falaciis mendaciisque eorum, qui se ex motu posituque aut aliis illicitis et improbatis artibus eventum et futura praenoscere ... profitebantur ... (Zu der Geschichte des Wortes Mathematik sei noch bemerkt: »Von einer Wissenschaft der Mathematik wußte Platon so wenig, wie seine Zeitgenossen. Wohl besaß er das Wort μαθήματα (Lehrgegenstände), aber es umfaßte alles, was im wissenschaftlichen Unterricht vorkam. Erst bei den Peripatetikern bekam das allgemeine Wort die besondere Bedeutung, welche wir ihm gegenwärtig noch beilegen, und umfaßte fortan Rechenkunst und Arithmetik, Geometrie der Ebene und Stereometrie, Musik und Astronomie . . .« (Cantor, G. d. M. I, S. 216).) In der glossierten Ausgabe des Corpus iuris (S. 2124) findet sich aber folgende schöne Ehrenrettung der Mathematik: »De maleficis et matematicis« heißt es dort, unter Hinzufügung der Glosse: »matematicis: sine aspiratione debet essealioquin quadrivium significat.« Soviel uns bekannt, ist auf diesen

allen anderen Wissenszweigen ein leuchtendes Vorbild. Allen anderen Wissenszweigen? Woran erkannte man denn, ob ein Satz mathematisch war? Welches ist denn das Merkmal, wodurch sich das mathematische Wissen von anderem unterscheidet? Ist nicht in Wahrheit jedes Wissen auf mathematischer Grundlage zu errichten? »Ἀεὶ ὁ ἄνθρωπος ἀριθμητίζει« gab Dedekind einer seiner Schriften als Motto[1]. Zweifellos gehört die Kenntnis der Zahlen zur Mathematik und nun mag irgendein Satz aufgestellt werden; man kann ihn nur dadurch sich klarmachen, daß man sich sein Gegenstück vorhält — und schon haben wir zwei Sätze und eben weil es zwei sind, können wir sie unterscheiden, sonst würden sie ja ineinanderfließen. Kurz: Allen unseren Schlüssen liegt der Gedanke der Zahl zugrunde, es ist eine reine Form alles unseres Erkennens. »Tolle numerum rebus omnibus et omnia pereunt. Adime saecula computum et omnia ignorantia caeca compleantur nec differri potest a ceteris animalibus, qui calculi nescit rationem«[2].

Wir sagten, der Gedanke der Zahl sei eine reine Form menschlicher Erkenntnis. Wir möchten an einem Beispiel klarmachen, wie wir diese Worte meinen. Dedekind nennt die Zahlen »freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen«. Der Zahlbegriff ist »gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit«[3]. Er liegt in »der Schöpferkraft des Geistes« begründet, »aus bestimmten Elementen ein neues Bestimmtes, ihr System zu erschaffen, das notwendig von jedem dieser Elemente verschieden ist . . .«[4]. Aber gerade auf diese Art der Ableitung des Zahlbegriffes scheinen unsere eben geäußerten Ansichten über Verschiedenheit und das dabei zutage tretende logische Prius des Zahlbegriffes anwendbar. Die von Dedekind

---

schlauen Ausweg der Trennung von Mathematik dem lernenswerten Quadrivium (vgl. hierüber Cantor, G. d. M. I, S. 566 und S. 823) und Matematik, der verdammenswerten Kunst, niemand vor oder nach dem Glossator verfallen. Auch die von ihm vorgeschlagene Schreibweise fanden wir sonst nirgends. Heißt es doch sogar an der späteren Stelle des Codex: »Nemo aruspicem cosulat, mathematicum, nemo ariolum . . .«, während es doch konsequenterweise hätte »matematicum« lauten müssen.

1) Dedekind, Zahlen.

2) Isidorus, Origines III 4, § 4, Cantor, G. d. M. I, S. 824.

3) Dedekind, Zahlen, S. III vgl. S. 21.

4) Dedekind, Zahlen, S. 13.

geleistete Arbeit bestünde demnach darin, unter Voraussetzung des Gedankens der Zahl das System der natürlichen Zahlen und dessen Eigenschaften abgeleitet zu haben[1]).

Die mathematische Erkenntnis, so möchten wir sagen, hat folgende Bestandteile. Es sind uns irgendwelche Eindrücke[2]) gegeben. Diese werden nun mathematisch bearbeitet, wenn sie gemäß eigentümlicher, ihre klare Bestimmbarkeit allererst möglich machender Arten des Ordnens erfaßt werden. Das, was wir das »Eigentümliche« dieser Methoden nannten, besteht darin, alle Eindrücke mit Hilfe eines Schemas — »unter Voraussetzung des Gedankens der Zahl« — in Mannigfaltigkeiten zusammenzufassen. Damit diese Arbeit wirklich restlos gelöst werden könne, müssen die Methoden rein formal in oben festgelegtem Sinne des Wortes sein. Das dürfte im letzten Grunde dem entsprechen, was in der Fragestellung der kritischen Philosophie mit Raum und Zeit bezeichnet und aufzuklären versucht wird.

Um aber Mißverständnisse zu vermeiden, möchten wir noch hinzufügen: Diese reinen Formen des — wie wir nunmehr sagen können — Mannigfaltigen sind uns nur als Mannigfaltigkeiten vorstellbar, das heißt, wir sind innerhalb unserer psychologisch beobachtbaren Vorstellungskraft nur im Besitze des durch sie bereits geordneten Stoffes von Eindrücken. Sie sind hier aber lediglich als Denkgrundlagen zum Vereinheitlichen des in der Anschauung Gegebenen betrachtet. Nie sind sie in der empirischen Anschauung und der von dieser abhängigen Vorstellung allein gegebene »Dinge«. Denn nur als letzte Einheiten der Gedanken, die wir über unsere Anschauung haben, sind sie zu verstehen. In diesem Sinne werden wir also im folgenden die Worte »Zeit« und »Raum« gebrauchen. Ohne sie scheint uns eine wissenschaftliche Mathematik nicht möglich; ja ob sie nicht überhaupt für jede wissenschaftliche Erkenntnis nötig sind, ist eine Frage, die nach dem oben Gesagten nicht so ohne weiteres von der Hand zu weisen ist. Denn selbst Worte, wie »zeitlos«, »ewig«, setzen ja in dem Bestreben, eine sachliche Bedeutung zu gewinnen, notwendig den Begriff der Zeit, wie Kant

1) Ob oder wieweit dieser Versuch gelungen ist, ist eine Frage, die wir beiseite lassen können.

2) Dieses Wort ist leicht mißverständlich. Es sollen damit nicht die psychologischen oder gar physiologischen Ursachen gemeint sein, aus denen heraus wir zum Nachdenken kommen. Wir wollen nur sagen, daß der Stoff, den wir als notwendigen Bestandteil der Erfahrung ansetzen müssen, nicht von uns geschaffen wird, sondern uns auf irgendwelchen Wegen zufließt.

gezeigt hat, voraus[1]). Ist nicht sogar der Zahlbegriff — als der Gedanke, die sukzessive Zusammenfügung von Einem zu Einem Gleichartigen stets vollziehen zu können — dem Begriffe der Zeit als seiner denknotwendigen Bedingung unterworfen[2])? Nun mag dieser Zahlbegriff die verschiedensten Gestalten annehmen, als ein Schema irgendwelcher Art vorgestellt werden und durch dieses seine Anwendung auf den mannigfachsten Gebieten finden: Im Hintergrunde steht immer als methodischer Abschluß der Gedanke der Zeit.

Wenn dieses richtig ist, so ist klar, daß die Wissenschaft von den Zahlen soweit absolut giltig ist, als sie ihre Sätze ohne jede Beimischung von empirischem Gehalt deduziert[3]). Wir machen ferner die Voraussetzung, dieses sei der Fall bis zur Ableitung der reellen Zahlen. Dazu ist freilich nötig, daß wir die natürlichen Zahlen, deren Gesamtheit ein durch besondere Eigenschaften ausgezeichneter Sonderfall eines vorgestellten »Schema von Zahlen« ist, nunmehr als Gegenstände gedacht werden, die mathematischer Betrachtungsweise unterliegen[4]).

Aus alledem würde folgen, daß die Gesetze der Arithmetik rein formal sind, daß die Arithmetik eine absolute Wissenschaft ist, soweit wir sie bisher verfolgt haben, daß ihre Begriffe, einschließlich des der Stetigkeit der reellen Zahlen nichts als ein System denknotwendiger Bedingungen sind.

Damit ist der Boden vorbereitet für die Aufnahme des dritten Begriffes, den wir untersuchen wollten, um sein Verhältnis zur Mathematik als Wissenschaft zu bestimmen: den der mathematischen Grenze. Die Erledigung dieser Frage ist heute insofern leichter, als sie zur Zeit Berkeley's war, als wir uns rein auf die Arithmetik stützen können und somit die vielumstrittene Frage der Geometrie

---

1) Gleiches läßt sich, wie uns scheint, auch für den Raum ausfüllen, da wir an jedes auch die Frage stellen können, wie es sich in die räumliche Mannigfaltigkeit eingliedern lasse. — Wir denken an Kant, Kr. d. r. V., S. 46 und 88, bei dem im Text erwähnten Beweise.

2) Vgl. Kant, Kr. d. r. V., S. 182. — Vgl. damit S. 179, wo die Beziehung des Schemas zur »Vorstellung einer Methode« und einem »Bild« auseinandergesetzt wird.

3) Um Irrtümer zu vermeiden, heben wir das Wort Kants hervor: »Daß alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebe, daran ist gar kein Zweifel... Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht alle aus der Erfahrung.«

4) Die Ableitung zum mindesten der reellen Zahlen aus der Reihe der natürlichen scheint uns durch Dedekind gesichert. (Vgl. Dedekind, Stetigkeit.)

als »reiner Wissenschaft« — in oben festgelegtem Sinne des Wortes — gar nicht anzuschneiden brauchen. Denn wir können heute die Grundbegriffe der höheren Analysis rein arithmetisch ohne Zuhilfenahme geometrischer Bestimmungen ableiten[1]). Wir haben daher schon in der Darstellung der Berkeley'schen Lehre soviel als irgend angängig die geometrische Einkleidung nur als historisches Kostüm betrachtend, dabei aus ihr die Grundgedanken herauszufinden versucht, um sie desto leichter mit den jetzigen vergleichen zu können. Man geht nicht auf Punkte und deren Abstände als Grundbegriffe der höheren Analysis zurück, auf denen sie sich aufbaue[2]), sondern kann den Grenzbegriff auf rein zahlenwissenschaftlichem Wege gewinnen.

Die Grundlage, von der dabei ausgegangen wird, ist also die »Gesamtheit« der reellen Zahlen. Das Wort »Gesamtheit« bedeutet hierbei nichts als eine Formel, einen kurzen Ausdruck für einen verwickelten Gedanken. Es besagt, daß wir im Besitze einer Angabe sind, gemäß der wir jede gewünschte reelle Zahl herstellen können. Wir hatten vorausgesetzt, daß diese Angabe frei von allem Empirischen sich auf dem Begriff der natürlichen Zahlen aufbaue. Ebenso ist der nächste zu entwickelnde Begriff, der der Zahlenfolge, eine Metapher. Er wird für gewöhnlich gewonnen, indem man die natürlichen Zahlen innerhalb ihres Schemas durch je eine reelle »ersetzt«, oder ihnen je eine reelle Zahl »zuordnet«[3]). Diese außerordentlich prägnanten Ausdrücke bezeichnen, daß uns ein Gesetz angegeben werde, wonach wir uns eine reelle Zahl herstellen, jedesmal, wenn wir in der Reihe der natürlichen Zahlen um einen Schritt weitergegangen sind, daß wir die so gewonnenen reellen Zahlen nach der Zeit ihrer Entstehung ordnen. Die Art und Weise der Formulierung dieses Gesetzes ist vollkommen offen gelassen, es ist jede, selbst das Wort »beliebig« angängig[4]). Es hat sich nun als praktisch herausgestellt, zur Kennzeichnung der Ordnung das Schema der natürlichen Zahlen selbst

1) Damit soll natürlich nichts über die Anwendung der Begriffe aus beiden Gebieten aufeinander gesagt sein.

2) Man tut das wenigstens nur insofern als man eine durchgängige Aequivalenz zwischen Punkt und (komplexer) Zahl feststellt. (Vgl. Knopp, Funktionentheorie, S. 5 ff.; Kowalewski, Einführung, S. 3. Im Gegensatz hierzu: Kowalewski, Grundzüge; wo die »Versinnlichung der Zahlen durch Punkte einer Ebene« erst lange nach der Entwicklung der Grenzbeziehung gelehrt wird.)

3) Vgl. Kowalewski, Grundzüge § 11, S. 11; Kowalewski, Einführung § 2, S. 5; Knopp, Funktionentheorie, § 2, S. 9 und § 5, S. 17.

4) Eben bei der Festlegung der Gesetze und ihrer Untersuchung beginnt das,

anzuwenden, so daß jede Zahl einer Zahlenfolge durch die natürliche Zahl bezeichnet wird, der sie »zugeordnet« wurde (x_n).

Bei dem Studium der Zahlenfolgen hat man nun folgende Verknüpfung von Begriffen als grundlegend für die höhere Analysis gefunden: Wenn die Indices einer Zahlenfolge über jede noch so große Zahl hinausgehen, wenn sich ferner eine reelle Zahl l derart angeben läßt, daß bei beliebig gewähltem positiven ε, von einer bestimmten von der Wahl des ε abhängigen Stelle m der Indices an für alle $n > m$, $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$ wird — wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, so nennt man die Zahlenfolge unendlich und konvergent, und die Zahl l ihren Grenzwert[1]).

Durch diese Festlegung wird ein völlig neuer Begriff konstruiert. In dem Begriff der Zahlenfolge, ja sogar in dem der unendlichen Zahlenfolge steckt nicht der der Grenze als ein Gedanke, den man ohne weitere Hilfsmittel als das kritische Sich-Besinnen herausschälen könnte; man mag den ersteren bis in die letzten Grundlagen verfolgen: Er besagt nur eine Zuordnung von reellen Zahlen zu dem Schema der natürlichen, wozu als Kennzeichen der Unendlichkeit noch kommt, daß man bei jeder natürlichen Zahl (wie groß sie auch immer sei) diese Zuordnung vollziehen könne. Erst die Synthese der verschiedenen Begriffe durch eine Ungleichung liefert den neuen Begriff, die Grenze.

Nachdem wir so die drei Begriffe Wissenschaft, Mathematik und Grenze entwickelt, erklärt oder definiert haben, wenden wir uns nun der neuen Frage zu, was denn eigentlich der Grenzbegriff für eine Mathematik als Wissenschaft zu bedeuten habe. Welche Aufgabe fällt ihm in dem Bereich der mathematischen Begriffe zu? Uns scheint es damit folgendermaßen zu stehen. Der Grenzbegriff gibt die Antwort auf die Frage, unter welchen Bedingungen wir mit den Hilfsmitteln der reellen Zahlen uns der Gesamtheit einer unendlichen Zahlenfolge versichern können; wir fordern eine formell ausdrückbare Vorstellung ihrer Totalität.

---

was man für gewöhnlich als das spezifisch mathematische ansieht, die durch Zahlzeichen irgendwelcher Art bestimmte Formel.

1) Wir wählen diese Definition des Grenzwertes (Knopp, Funktionentheorie, S. 18), weil wir zu ihr am wenigsten begriffliche Vordiskussion brauchen. Aus demselben Grunde haben wir uns auch auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränkt. Auf eine Ableitung des Grenzbegriffes aus der Mengenlehre (lediglich unter Zuhilfenahme des Gedankens der »Ordnung«) sind wir wegen der noch zweifellos vorhandenen Schwierigkeiten bei der gedanklichen Fundierung dieser neuen Lehre nicht eingegangen. (Vgl. u. a. Ziehen, Logik-Mengenlehre.)

In diesem Bestreben, und den Versuchen, es zu befriedigen, hat sich seit Berkeley's Zeit ein eigentümlicher Wandel vollzogen. Kepler's vorsichtig gehandhabtes »gewissermaßen« Unendlich-Kleines, Cavalieri's Indivisibilien, de l'Hospital's »infiniment petit«, alle diese Begriffe, ja selbst der Newton'sche Ausdruck: »Evanescant iam augmenta illa«[1]), sie alle leiden an dem inneren Widerspruch, die Gesamtheit der Folge nicht nur formell, sondern auch gedanklich zum Abschluß zu bringen; man läßt eine unendlich gedachte Folge doch plötzlich in Gedanken aufhören. Das ist auch der mathematische Grundzug, der Berkeley's Erörterung im »Analyst« so schlagend macht, diesen inneren Widerspruch ans Licht zu ziehen und zu zeigen, daß dadurch die Methode der damaligen Infinitesimalbetrachtungen tatsächlich zu wünschen übrig läßt. Soweit also können wir uns der Polemik Berkeley's anschließen.

Andererseits können wir mit Berkeley auch nicht einen Schritt weiter vorwärts gehen. Trotz aller seiner mathematischen Kenntnisse kommt er um die psychologische »Grundlegung« der mathematischen Begriffe nicht herum, noch über sie hinaus. Das ist auch der Punkt, wo ihn der sonst so gerne mit »Mißverständnissen« entschuldigende Maclaurin zurückweisen muß: »Though Geometricians are under no necessity of supposing a given magnitude to be divided into an infinite number of parts or to be made up of infinitesimals, they cannot so well avoid the supposing it to be divided in a greater number of parts than may be distinguished in it by sense in any particular circumstances«[2]). Die Beweisführung des Mathematikers läßt freilich auch noch eine Lücke: Es sei doch merkwürdig, daß eine Linie von einem Zoll Länge bei geringerer Entfernung vom Sinneswerkzeug zweifellos mehr »Punkte« enthalte, als bei größerer[3]). Dieser Beweis ist nach zwei Richtungen hin bezeichnend. Bei einer konsequenten Durchführung seiner Theorie hätte sich Berkeley noch längst nicht für überwunden erklären müssen. Denn wenn die Grundlage der Geometrie das »minimum sensibile« — Berkeley's »Punkt« — ist, so bestimmt sich selbstverständlich auch die Größe der Linien nach der Anzahl dieser

1) Vgl. S. 40 dieser Abh.

2) Maclaurin, Treatise I, 10 § 291, S. 342.

3) Vgl. die Forts. der eben zitierten Stelle: It would seem very unaccountable not to allow them to conceive a given line of an inch in length for exemple, viewed at the distance of ten sect, to be divided into more parts than are discerned in it at that distance; since by bringing it nearer a greater number of perts is actually perceived in it!

in ihnen wahrgenommenen Punkte. Die Länge der Linie in größerer Entfernung würde also gar nicht dieselbe sein, wie die der in näherem Abstand betrachteten; das ganze Paradoxon wäre zum Verschwinden gebracht[1]. Zweitens verkennt aber Maclaurin scheinbar hier, daß die »gegebene«, das heißt mit den Sinnen wahrnehmbare Linie gar nicht das Objekt einer Mathematik sein kann, die, von der Erfahrung unabhängig, deren wissenschaftliche Erfassung überhaupt erst möglich machen muß. Mit anderen Worten: Beschreiten wir den von den Engländern angebahnten Weg, so kommen wir nicht zu einer reinen Wissenschaft der Mathematik, sondern zu einer Sammlung von Regeln, von »Wahrheiten«, deren Giltigkeit abhängt entweder von dem behandelnden Subjekt — oder von dem jeweiligen Stande der Erfahrung, die dann freilich einstweilen in der Luft schwebte, bis eine neue sie zu einer Wissenschaft adelnde Disziplin erfunden wäre.

Für die Arithmetik, obwohl er gerade sie in seinem Tagebuch der Geometrie vorzieht, hat Berkeley Ansätze gemacht, seinen Standpunkt energisch für das ganze Gebiet der Zahlen auszubauen. Sie ist nicht die Lehre von der Gesetzmäßigkeit der bleibenden Bedingungen, die für die Erkenntnis des Mannigfaltigen unentbehrlich sind: sie ist die Lehre von den Regeln, die erfahrungsgemäß mit dem Auftreten von Mannigfaltigem verbunden sind, soweit es sich darum handelt, dies zu zählen.

Bei dem uns beschäftigenden Problem aber hat Berkeley sich im »Analyst« in Einzelheiten versenkt und, so sonderbar es klingen mag, hat er dabei wesentlich mehr geleistet, als bei dem Ausbau seines Dogmas. Denn mit derselben ruhigen Sicherheit, mit der er, ohne sein metaphisches System zu benutzen, die Widerspruchsfülle des Unendlich-Kleinen darlegte, wobei er überraschend viel instinktiven wirklich wissenschaftlichen Scharfsinn zeigt, — mit

1) Eine ähnliche Folgerung hat Berkeley tatsächlich in seinem Tagebuch gezogen. (Vgl. C. P. B. (488), sowie Cassirer, Erkenntnisproblem, S. 224 f.) Man kann Berkeley's Lehre einen Versuch zur Lösung der Quadratur des logischen Zirkels einer aus der Erfahrung stammenden, psychologisch begründeten Wissenschaft der Mathematik nennen. Bezeichnend ist übrigens, daß weder Berkeley, noch sein Fortbildner David Hume (vgl. über deren Verhältnis: Meyer, Hume und Berkeley) in ihren reiferen Werken diese rigorose Konsequenz kundgetan haben. Sie haben sie in ihrer Jugend zwar entwickelt, später aber unterdrückt. Bei Berkeley findet sich noch nicht einmal in den auch nach dieser Seite hin gänzlich unbedeutenden Jugendarbeiten der »Arithmetica« und der »Miscellanea Mathematica« die von uns angedeutete Weiterbildung und Verteidigung seiner Lehre.

derselben ruhigen Sicherheit hat Maclaurin den Subjektivismus aufgedeckt, der im Berkeley'schen Dogma versteckt enthalten ist.

Deshalb ist die moderne Mathematik weder de l'Hospital, noch Berkeley gefolgt; sie griff vielmehr zurück auf die Ansätze, die sich bei Leibniz und Newton finden lassen, und baute auf diesen weiter. Sie schloß die Gesamtheit einer unendlichen Folge nicht mehr durch Gleichungen von festen Größen ab, sondern verlangte nur, daß die einschließenden Ungleichungen für jedes (positive) ε sich erfüllen lassen.

Dadurch umging sie beide gemachten Fehler. Die Gesamtheit der ε ließ sie unabgeschlossen, also blieb auch die Unendlichkeit der Folge gedanklich unangetastet, andererseits vermied sie dadurch, daß die Bedingung für jedes ε erfüllt sein sollte, dadurch also den Grenzwert völlig unabhängig von dem jeweiligen Träger des Gedankens (und dessen Sinnen namentlich) machte, jede Willkür und Subjektivität bei der Feststellung eines Beweises.

Der Grenzbegriff ist also eine Relationsregel für Zahlen, d. h. eine spezielle Bedingung für das einheitliche Ordnen des Mannigfaltigen. Sein Wert für eine Mathematik als Wissenschaft würde also von der Bedeutung abhängen, die man dieser Art von Bedingungen beimißt. Sind es schlechthin bleibende Bestimmungen oder nur objektiv giltige? Die Beziehung der Grenze ist von der Stellung abhängig, die man den Zahlen einräumt; und damit ist eines der folgenschwersten Probleme der Philosophie der Mathemathik aufgerollt. Trägt die Zahl irgendwelchen empirischen Charakter, so fällt damit die Möglichkeit, die bisherige mathematische Erkenntnis als absolut giltige Wissenschaft aufrechtzuerhalten. Sie würde zu einem Zweig der Naturwissenschaften, der die anderen beherrscht; und das — um es kurz anzudeuten — hindert uns, dieser Theorie zuzustimmen. Denn dann ist kein rechter Grund mehr vorhanden, aus dem sich der Primat der Mathematik in den Naturgesetzen erklären ließe. Ist dagegen die Zahl eine unbedingt notwendige Bestimmung, die einheitliche Ordnung unserer Gedanken über Anschauung zu sichern, so ist die Herrschaft der Mathematik ohne weiteres faßbar. Und — um zu unserem Spezialthema zurückzukommen — dann gehört auch der Grenzbegriff in das System der Gesetze, die von den reinen Formen der Anschauung stammen.

Register.

Kant-Gesellschaft.

Verwaltungsausschuß.

Vorstand: **Gottfried Meyer,** Dr. med. (h. c.), Geh. Oberreg.-Rat, Kurator der Universität Halle, Reilstr. 53.

Uebrige Mitglieder des Verwaltungs-Ausschusses:

Ernst Cassirer, Dr., o. ö. Professor an der Universität Hamburg, Blumenstr. 26.

Max Frischeisen-Köhler, a. o. Professor an der Universität Halle, Mozartstr. 24.

Heinrich Lehmann, Dr. jur. (h. c.) Dr. med. (h. c.) Geh. Kommerzienrat, Halle.

Paul Menzer, Dr., o. ö. Professor an der Universität Halle, Fehrbellinstr. 2.

Rudolf Stammler, Dr. jur. et phil. (h. c.), Geh. Just.-Rat, o. ö. Prof. an der Universität Berlin.

Theodor Ziehen, Dr., Geh. Med.-Rat, o. ö. Professor an der Universität Halle, Ulestr. 1.

Geschäftsführer:

Hans Vaihinger, Dr., Geh. Reg.-Rat, o. ö. Prof. a. d. Universität Halle, Reichardstr. 15.

Arthur Liebert, Prof. Dr., Hochschuldozent, Berlin W. 15, Fasanenstr. 48.

Die Kant-Gesellschaft verfolgt den Zweck, durch das Studium der Kantischen Philosophie die Weiterentwicklung der Philosophie überhaupt zu fördern. Ohne ihre Mitglieder irgendwie zur Gefolgschaft gegenüber der Kantischen Philosophie zu verpflichten, hat die Kant-Gesellschaft keine andere Tendenz als die von Kant selbst ausgesprochene, durch das Studium seiner Philosophie philosophieren zu lehren.

Ihren Zweck sucht die Kant-Gesellschaft in erster Linie zu verwirklichen durch die **„Kant-Studien“**: die Mitglieder der Kant-Gesellschaft erhalten diese Zeitschrift (jährlich 4 Hefte) kostenlos zugesandt; dasselbe ist der Fall mit den **„Ergänzungsheften“** der „Kant-Studien“, welche jedesmal eine größere geschlossene Abhandlung enthalten (gewöhnlich 3—5 im Jahre). Außerdem erhalten die Mitglieder für ihren Beitrag jährlich 1—2 Bände der **„Neudrucke** seltener philosophischer Werke des 18. und 19. Jahrh.“ sowie die von der Gesellschaft veröffentlichten **„Philosophischen Vorträge“.** (Jährlich 3—4 Hefte.)

Das Geschäftsjahr der Kant-Gesellschaft ist das Kalenderjahr, der Eintritt kann aber jederzeit erfolgen. Die bis dahin erschienenen Veröffentlichungen des betr. Jahrganges werden Neueintretenden nachgeliefert. Die Satzungen, Mitgliederverzeichnis usw. sind unentgeltlich durch den stellv. Geschäftsführer Prof. Dr. Arthur Liebert, Berlin W. 15, Fasanenstr. 48, zu beziehen, an den auch die Beitrittserklärungen sowie der Jahresbeitrag (mindestens Mk. 20.—) zu richten sind.

Halle, Berlin, im Februar 1922.

Die Geschäftsführung: H. Vaihinger. A. Liebert.

Druck von H. Laupp jr in Tübingen.

Kant-Gesellschaft.

Verwaltungsausschuß.

Vorstand: **Gottfried Meyer,** Dr. med. (h. c.), Geh. Oberreg.-Rat, Kurator der Universität Halle, Reilstr. 53.

Uebrige Mitglieder des Verwaltungs-Ausschusses:

Ernst Cassirer, Dr., o. ö. Professor an der Universität Hamburg, Blumenstr. 26.

Max Frischeisen-Köhler, a. o. Professor an der Universität Halle, Mozartstr. 24.

Heinrich Lehmann, Dr. jur. (h. c.) Dr. med. (h. c.) Geh. Kommerzienrat, Halle.

Paul Menzer, Dr., o. ö. Professor an der Universität Halle, Fehrbellinstr. 2.

Rudolf Stammler, Dr. jur. et phil. (h. c.), Geh. Just.-Rat, o. ö. Prof. an der Universität Berlin.

Theodor Ziehen, Dr., Geh. Med.-Rat, o. ö. Professor an der Universität Halle, Ulestr. 1.

Geschäftsführer:

Hans Vaihinger, Dr., Geh. Reg.-Rat, o. ö. Prof. a. d. Universität Halle, Reichardstr. 15.

Arthur Liebert, Prof. Dr., Hochschuldozent, Berlin W. 15, Fasanenstr. 48.

Die Kant-Gesellschaft verfolgt den Zweck, durch das Studium der Kantischen Philosophie die Weiterentwicklung der Philosophie überhaupt zu fördern. Ohne ihre Mitglieder irgendwie zur Gefolgschaft gegenüber der Kantischen Philosophie zu verpflichten, hat die Kant-Gesellschaft keine andere Tendenz als die von Kant selbst ausgesprochene, durch das Studium seiner Philosophie philosophieren zu lehren.

Ihren Zweck sucht die Kant-Gesellschaft in erster Linie zu verwirklichen durch die **„Kant-Studien“**: die Mitglieder der Kant-Gesellschaft erhalten diese Zeitschrift (jährlich 4 Hefte) kostenlos zugesandt; dasselbe ist der Fall mit den **„Ergänzungsheften“** der „Kant-Studien“, welche jedesmal eine größere geschlossene Abhandlung enthalten (gewöhnlich 3—5 im Jahre). Außerdem erhalten die Mitglieder für ihren Beitrag jährlich 1—2 Bände der **„Neudrucke** seltener philosophischer Werke des 18. und 19. Jahrh.“ sowie die von der Gesellschaft veröffentlichten **„Philosophischen Vorträge“.** (Jährlich 3—4 Hefte.)

Das Geschäftsjahr der Kant-Gesellschaft ist das Kalenderjahr, der Eintritt kann aber jederzeit erfolgen. Die bis dahin erschienenen Veröffentlichungen des betr. Jahrganges werden Neueintretenden nachgeliefert. Die Satzungen, Mitgliederverzeichnis usw. sind unentgeltlich durch den stellv. Geschäftsführer Prof. Dr. Arthur Liebert, Berlin W. 15, Fasanenstr. 48, zu beziehen, an den auch die Beitrittserklärungen sowie der Jahresbeitrag (mindestens Mk. 20.—) zu richten sind.

Halle, Berlin, im Februar 1922.

Die Geschäftsführung: H. Vaihinger. A. Liebert.

Druck von H. Laupp jr in Tübingen.

DATE DUE

GAYLORD			PRINTED IN U.S.A.

Kant-Gesellschaft.

Verwaltungsausschuß.

Die Kant-Gesellschaft verfolgt den Zweck, durch das Studium der Kantischen Philosophie die Weiterentwicklung der Philosophie überhaupt zu fördern. Ohne ihre Mitglieder irgendwie zur Gefolgschaft gegenüber der Kantischen Philosophie zu verpflichten, hat die Kant-Gesellschaft keine andere Tendenz als die von Kant selbst ausgesprochene, durch das Studium seiner Philosophie philosophieren zu lehren.

Ihren Zweck sucht die Kant-Gesellschaft in erster Linie zu verwirklichen durch die **„Kant-Studien“**: die Mitglieder der Kant-Gesellschaft erhalten diese Zeitschrift (jährlich 4 Hefte) kostenlos zugesandt; dasselbe ist der Fall mit den **„Ergänzungsheften“** der „Kant-Studien“, welche jedesmal eine größere geschlossene Abhandlung enthalten (gewöhnlich 3—5 im Jahre). Außerdem erhalten die Mitglieder für ihren Beitrag jährlich 1—2 Bände der **„Neudrucke** seltener philosophischer Werke des 18. und 19. Jahrh.“ sowie die von der Gesellschaft veröffentlichten **„Philosophischen Vorträge“.** (Jährlich 3—4 Hefte.)

Das Geschäftsjahr der Kant-Gesellschaft ist das Kalenderjahr, der Eintritt kann aber jederzeit erfolgen. Die bis dahin erschienenen Veröffentlichungen des betr. Jahrganges werden den Neueintretenden nachgeliefert. Die Satzungen, Mitgliederverzeichnis usw. sind unentgeltlich durch den stellv. Geschäftsführer Prof. Dr. Arthur Liebert, Berlin W. 15, Fasanenstr. 48, zu beziehen, an den auch die Beitrittserklärungen sowie der Jahresbeitrag (mindestens Mk. 20.—) zu richten sind.

Halle, Berlin, im Februar 1922.

Die Geschäftsführung: H. Vaihinger. A. Liebert.

Druck von H. Laupp jr in Tübingen.

DATE DUE

GAYLORD			PRINTED IN U.S.A.

